

A.6

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 6

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden.

320621

Bei der folgenden sechsstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt:

3 8 * * 4 2

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, daß die Zahl durch 9 teilbar ist. Gib alle sechsstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, daß alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

320622

Ein Holzwürfel, dessen sechs Seitenflächen mit roter Farbe angestrichen wurden, wird anschließend in eine Anzahl untereinander gleichgroßer Teilwürfel zersägt.

- a) Wie groß ist diese Anzahl, wenn bekannt ist, daß sich unter den entstandenen Teilwürfeln genau 72 mit je genau zwei roten Seitenflächen befinden?
- b) Wieviele der übrigen entstandenen Teilwürfel haben je genau eine rote Seitenfläche,
- c) wieviele haben keine rote Seitenfläche?

320623

Bei einem Geländespiel erhält eine Pfadfindergruppe folgenden Auftrag:

- Geht vom Ausgangspunkt A aus 600 m geradlinig nach Norden! Dort befindet sich ein Aussichtsturm (Punkt B).
- Ändert nun euren Kurs um 60° in nordöstliche Richtung! Nach 500 m erreicht ihr eine alte Scheune (Punkt C).
- Geht jetzt im rechten Winkel in etwa südöstliche Richtung um 700 m weiter! Dort ist eine hohle Eiche (Punkt D). Von ihr aus sollt ihr wieder nach A zurückfinden.

- a) Um wieviel Grad muß die Pfadfindergruppe in D den Kurs ändern, um geradlinig nach A zu gelangen?
- b) Wie lang ist die Strecke von A nach D ?
- c) Ein Mitglied der Gruppe will bereits von C aus nach A zurückkehren. Wie weit ist A von C entfernt?

Fertige zur Beantwortung dieser Fragen eine Zeichnung an (auf weißem, nicht kariertem oder liniiertem Papier; in geeigneter Verkleinerung); entnimm die gesuchten Angaben mit Zeichengenauigkeit!

320624

Ein rechteckiges Kinderzimmer ist 4 m und 40 cm lang sowie 3 m und 30 cm breit. Es hat genau eine Tür; diese ist 90 cm breit. Thomas will an die Wände dieses Zimmers eine neue Fußbodenleiste anbringen. Er berechnet durch Berücksichtigung der genannten Maßangaben die erforderliche Gesamtlänge an Leistenholz. Das laufende Meter Leistenholz kostet 5 DM . Thomas kauft die von ihm berechnete Gesamtlänge und bezahlt mit einem Hundertmarkschein. Wieviel Geld erhält er zurück?

320621 Lösung:

10 Punkte

Durch Einfügen zweier Ziffern entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Das ist wegen $3+8+4+2 = 17$ genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern sich von 1 nur um ein Vielfaches der Zahl 9 unterscheidet. Da eine Summe von zwei Ziffern höchstens $9+9 = 18$ betragen kann, ist folglich für die Summe der einzutragenden Ziffern nur entweder 1 oder 10 möglich. Alle Möglichkeiten, aus zwei Ziffern eine dieser Summen zu bilden, sind

$$1 = 0+1 = 1+0, \\ 10 = 1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 5+5 = 6+4 = 7+3 = 8+2 = 9+1.$$

Alle gesuchten Zahlen sind daher

$$380142, 381042, 381942, 382842, 383742, 384642, 385542, \\ 386442, 387342, 388242, 389142.$$

320622 Lösung:

12 Punkte

- a) Je genau zwei rote Seitenflächen befinden sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die vor dem Zersägen an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten, aber nicht eine seiner Ecken enthielten. Da der ursprüngliche Würfel genau 12 Kanten hatte, lagen an jeder seiner Kanten also genau $72:12 = 6$ derartige Teilwürfel. In der Verlängerung einer Reihe solcher Teilwürfel folgte nach beiden Seiten noch je genau ein Würfel, der eine Ecke des ursprünglichen Würfels enthielt. Einschließlich dieser beiden Würfel bestand eine solche Reihe also aus genau 8 Teilwürfeln. Daher wurde der ursprüngliche Würfel in $8^3 = 512$ Teilwürfel zersägt.
- b) Je genau eine rote Seitenfläche befindet sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die an eine Seitenfläche, aber nicht an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten. Für je eine der 6 Seitenflächen des ursprünglichen Würfels bildeten diese Teilwürfel eine quadratförmige Anordnung von $6^2 = 36$ Stück; daher gibt es insgesamt $6 \cdot 36 = 216$ solche Teilwürfel.
- c) Die Teilwürfel ohne rote Seitenfläche bildeten vor dem Zersägen eine würfelförmige Anordnung, die ganz im Innern des ursprünglichen Würfels lag und aus genau $6^3 = 216$ Teilwürfeln bestand.

[Zur Kontrolle kann man bestätigen, daß sich zusammen mit der Anzahl 8 der Teilwürfel an den Ecken des ursprünglichen Würfels (d.h. der Teilwürfel mit je genau drei roten Seitenflächen) wieder $72+216+216+8 = 512$ ergibt.]

320623 Lösung:

10 Punkte

Abb.L 320623 zeigt eine Darstellung, bei der 100 m verkleinert als 1 cm wiedergegeben werden. An einer solchen Zeichnung kann man mit Zeichengenaugigkeit (etwa auf 1° genau bzw. etwa auf 1 mm genau, d.h. für die Wegstrecken etwa auf 10 m genau) ablesen:

- a) In D muß der Kurs um $\delta \approx 103^\circ$ (in etwa südwestliche Richtung) geändert werden.
- b) Die Strecke von D nach A ist etwa 820 m lang.
- c) Der Punkt A ist von C etwa 950 m entfernt.

L.6

S.2

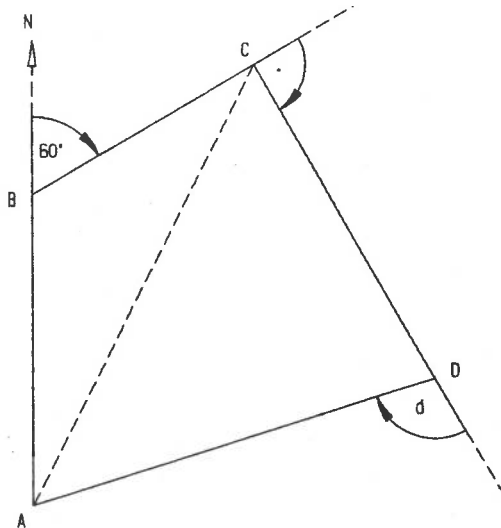


Abb.L 320623

320624 Lösung:

8 Punkte

Thomas berechnet unter Berücksichtigung der Länge $a = 4,40 \text{ m}$, der Breite $b = 3,30 \text{ m}$ des Zimmers und der Türbreite $t = 0,90 \text{ m}$ die erforderliche Gesamtlänge

$$2a + 2b - t = 8,80 \text{ m} + 6,60 \text{ m} - 0,90 \text{ m} = 14,50 \text{ m}.$$

Hierfür sind $5 \cdot 14,50 \text{ DM} = 72,50 \text{ DM}$ zu zahlen. Also erhält Thomas $100 \text{ DM} - 72,50 \text{ DM} = 27,50 \text{ DM}$ zurück.

Vorschläge zur Punktverteilung:

320621

Herleitung: Ziffernsumme muß 1 oder 10 sein 5
 Ermittlung aller Summenfälle und damit der gesuchten Zahlen... 5
 10

320622

a) Erkenntnis: Die Teilwürfel verteilen sich auf 12 Kanten 3
 An einer Kante $(72:12)+2 = 8$, insgesamt also $8 \cdot 3$ Teilw. 3
 b),c) Je 3 Punkte 6
 (Bei anderer Argumentation ggf.anders aufteilen) 12

320623

Korrekte, hinreichend genaue Zeichnung 6
 Ablesen der Größen, Maßstabberücksichtigung 4
 10

320624

Ermittlung der Gesamtlänge 5
 Ermittlung des Preises und des Restgeldes 3
 8