31. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe

Aufgaben

Olympiadeklassen 11-13

1.Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

311241

Es sei

$$x = e^{0,000009} - e^{0,000007} + e^{0,000002} - e^{0,000001},$$
$$y = e^{0,000008} - e^{0,000005}.$$

Man untersuche, ob $x = y$ oder $x > y$ oder $x < y$ gilt.

311242

Auf einem Kreis k seien A_1, A_2 und P drei paarweise verschiedene Punkte; die Strecke A_1A_2 sei kein Durchmesser von k. Für $i = 1;2$ sei jeweils k_i ein Kreis, der k von außen in A_i berührt, und B_i sei der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises k_i mit der Geraden durch P und A_i. Der Mittelpunkt von k_i sei M_i.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die durch A_1, A_2 bzw. durch B_1, B_2 bzw. durch M_1, M_2 gelegten Geraden a bzw. b bzw. m entweder alle drei genau einen Punkt gemeinsam haben oder alle drei zueinander parallel sind.

311243

Man beweise: Ist p eine Primzahl und werden zwei ganze Zahlen n, k mit $0 \leq k \leq n$ im Ziffernsystem mit der Basis p geschrieben als

$$n = a_t \cdot p^t + a_{t-1} \cdot p^{t-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0,$$
$$k = b_t \cdot p^t + b_{t-1} \cdot p^{t-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0$$

(a_j, b_j ganze Zahlen mit $0 \leq a_j < p$, $0 \leq b_j < p$ für $j = 0,1,\dots,t$), so läßt die Zahl $\binom{n}{k}$ bei Division durch p denselben Rest wie

$$\binom{a_t}{b_t} \cdot \binom{a_{t-1}}{b_{t-1}} \cdot \dots \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0}.$$

Hinweis: Für ganze Zahlen $n \geq 0$ und $k \geq 1$ wird

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

definiert, für ganze Zahlen $n \geq 0$ ferner $\binom{n}{0} = 1$.

31. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe

Aufgaben

Olympiadeklassen 11-13

2.Tag

311244

Es sei $P_1P_2P_3$ ein gegebenes beliebiges Dreieck; sein Flächeninhalt sei F, sein Inkreis habe den Mittelpunkt M und den Radius r.

a) Man beweise, daß eine Pyramide $P_1P_2P_3S$ genau dann unter allen Pyramiden $P_1P_2P_3S$ mit dieser Grundfläche $P_1P_2P_3$ und mit gegebenem Volumen V einen kleinstmöglichen Oberflächeninhalt hat, wenn das Lot von S auf die durch P_1 , P_2 , P_3 gelegte Ebene den Fußpunkt M hat.

b) Man beweise, daß dieser kleinstmögliche Oberflächeninhalt

$$F + \sqrt{F^2 + \left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$ beträgt.

311245

Es sei a eine beliebige reelle Zahl mit $a \geq 2$. Man ermittle zu a alle Funktionen, die den nachstehenden Bedingungen (1),(2),(3) genügen:

(1) Die Funktion f ist für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x definiert; alle Funktionswerte f(x) sind reelle Zahlen.

(2) Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x, y gilt mit $x \geq y$

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y) \ .$$

(3) Es gilt $f(1) = a$.

[Bemerkung: f soll als „elementare Funktion in geschlossenem Ausdruck" angegeben werden, d.h.:Die formelmäßige Angabe der Funktionswerte f(x) soll dadurch erfolgen, daß auf x sowie auf Konstanten, Potenz-, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen von x oder auf Umkehrfunktionen solcher Funktionen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) angewandt werden, und zwar in einer von x unabhängigen Anzahl der Anwendungsschritte.]

Von den nachstehenden Aufgaben 311246A *und* 311246B *ist* genau eine *auszuwählen und zu lösen:*

311246 A

Man untersuche, ob es eine ganze Zahl $n \geq 2$ sowie eine positive reelle Zahl c und n positive reelle Zahlen a_i $(i = 1,\ldots,n)$ derart gibt, daß die Summe der a_i gleich $n \cdot c$, die Summe der Quadrate der a_i gleich $2n \cdot c^2$ und mindestens eine der Zahlen a_i größer als $(1 + \sqrt{n-1}) \cdot c$ ist.

311246 B

In einem utopischen Roman ist von einem unendlich lange lebenden Autor die Rede. An jedem Tag schreibt er einen Text, mit dem er mindestens ein Blatt Papier füllt und, wenn er an diesem Tag noch weitere Blätter beginnt, auch jedes dieser Blätter am gleichen Tag füllt. Im Lauf jedes Jahres füllt er auf diese Weise eine Anzahl Blätter; für verschiedene Jahre können diese Anzahlen verschieden sein, in keinem Jahr jedoch beträgt diese Anzahl mehr als 730.
Man beweise: Im Leben dieses Autors gibt es für jede positive ganze Zahl n einen Zeitraum von aufeinanderfolgenden Tagen, in dem der Autor genau n Blätter füllt.

Hinweis: Es wird vorausgesetzt, daß die derzeit gültige Regel unendlich lange gilt, wonach sich stets unter acht aufeinanderfolgenden Jahren mindestens ein Schaltjahr mit 366 Tagen befindet, während jedes Nicht-Schaltjahr aus 365 Tagen besteht.

31. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Lösungen
Olympiadeklassen 11-13
1.Tag

311241 Lösung: 6 Punkte

Mit der Abkürzung $a = e^{0,000001}$ ist

$$x-y = a^9 - a^8 - a^7 + a^5 + a^2 - a = a\cdot(a^7(a-1) - a^4(a^2-1) + a-1)$$
$$= a\cdot(a-1)\cdot(a^7 - a^4(a+1) + 1) = a\cdot(a-1)\cdot(a^7 - a^5 - (a^4 - 1))$$
$$= a\cdot(a-1)\cdot(a^2-1)\cdot(a^5 - (a^2 + 1)) \quad . \qquad (1)$$

Nun gilt $1 < e < 4$, also

$$1 < a < a^2 < a^5 = e^{0,000005} < 4^{0,000005} < 4^{0,5} = 2$$

und damit $\quad a^5 - a^2 - 1 < 2 - 1 - 1 = 0 \qquad (2)$

sowie $\quad a > a-1 > 0 \;, \quad a^2 - 1 > 0 \;. \qquad (3)$

Wegen (1),(2),(3) ist $x-y < 0$, also $x < y$.

Bemerkungen: Eine Ermittlung der Summanden in x und y „nur" auf 10 Dezimalen nach dem Komma genau trägt nicht zur Lösung bei, da die Summanden mit dieser Genauigkeit nicht von 1,000009 ; 1,000007 usw. zu unterscheiden sind.
Im obigen Lösungsweg wurden außer elementaren Umformungen nur Monotonieaussagen zum Potenzieren sowie die Ungleichung $1 < e < 4$ verwendet. Möglich ist stattdessen z.B. auch eine Abschätzung mit Hilfe der Reihe $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$: Für $0 < z < \frac{5}{6}$ folgt einerseits $e^z > 1 + z + \frac{z^2}{2}$, andererseits $6 - 6z > 1$ und daher

$$e^z < 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\cdot(1 + z + z^2 + \cdots) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6(1-z)}$$
$$< 1 + z + \frac{z^2}{2} + z^3 \;.$$

Mit $z = 0,000001$ folgt: Wegen $0 < z < \frac{5}{6}$ ist dies anwendbar, und wegen $z < \frac{1}{431}$ führt es auf

$$y-x = - e^{9z} + e^{8z} + e^{7z} - e^{5z} - e^{2z} + e^z$$
$$> - \left(1 + 9z + \frac{81}{2}\cdot z^2 + 729z^3\right) + \left(1 + 8z + \frac{64}{2}\cdot z^2\right) + \left(1 + 7z + \frac{49}{2}\cdot z^2\right)$$
$$- \left(1 + 5z + \frac{25}{2}\cdot z^2 + 125z^3\right) - \left(1 + 2z + \frac{4}{2}\cdot z^2 + 8z^3\right)$$
$$+ \left(1 + z + \frac{1}{2}\cdot z^2\right) = 2z^2\cdot(1 - 431z) > 0 \;.$$

311242 1.Lösungsweg (Abb.L 311242): 6 Punkte

Der Mittelpunkt von k sei M, der Radius von k_i sei r_i $(i = 1;2)$, Wegen $A_1 \neq A_2$ ist die Gerade a nicht Tangente an k, also auch nicht an k_2 ; sie schneidet daher k_2 außer in A_2 in einem Punkt $A_3 \neq A_2$. Für die folgenden Winkel gilt wegen ihrer Lage in gleichschenkligen Dreiecken oder als Scheitelwinkel

$$\overline{\sphericalangle MPA_i} = \overline{\sphericalangle MA_iP} = \overline{\sphericalangle M_iA_iB_i} = \overline{\sphericalangle M_iB_iA_i} \quad (i = 1;2) ,$$

$$\overline{\sphericalangle MA_1A_2} = \overline{\sphericalangle MA_2A_1} = \overline{\sphericalangle M_2A_2A_3} = \overline{\sphericalangle M_2A_3A_2} .$$

Nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt damit

$$M_1B_1 \parallel MP \parallel M_2B_2 \qquad (1)$$

und $MA_1 \parallel M_2A_3$, d.h.

$$M_1A_1 \parallel M_2A_3 . \qquad (2)$$

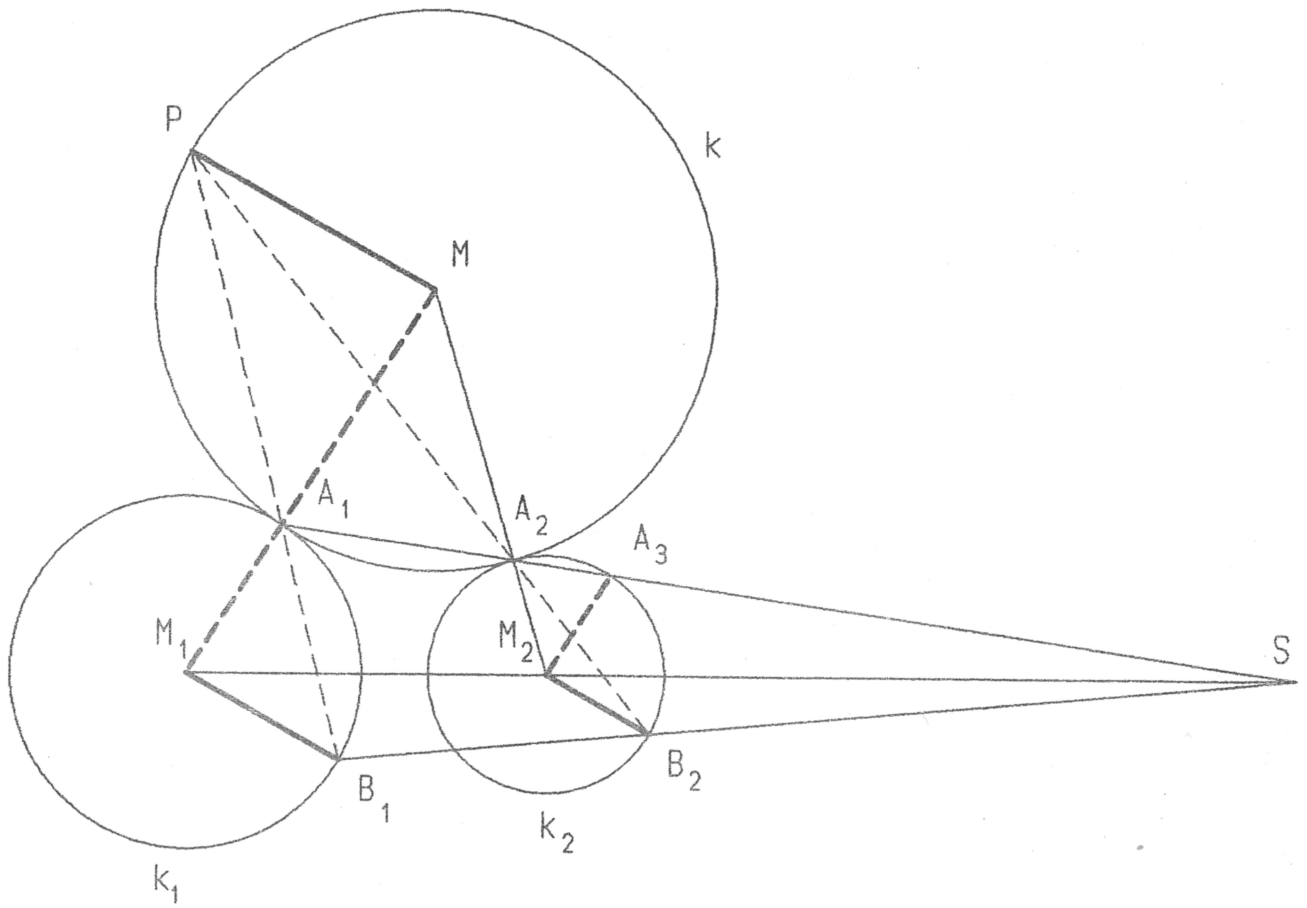
Ist nun $r_1 \neq r_2$, so gilt: Da M nicht auf a liegt, liegen auch M_1 , M_2 nicht auf a, also wird m von a in genau einem Punkt S außerhalb der Strecke M_1M_2 geschnitten; nach (1) gilt ferner: Entweder liegen beide Punkte B_1 , B_2 auf m , dann gehen a, b und m durch S ; oder m wird auch von b in genau einem Punkt T außerhalb M_1M_2 geschnitten, und nach (2),(1) folgt aus dem Strahlensatz

$$\overline{SM_1} : \overline{SM_2} = \overline{M_1A_1} : \overline{M_2A_2} = \overline{M_1B_1} : \overline{M_2B_2} = \overline{TM_1} : \overline{TM_2} ;$$

d.h., S und T teilen M_1M_2 beide äußerlich im gleichen Verhältnis $r_1 : r_2$. Damit folgt S = T; d.h., a, b und m haben alle drei genau den Punkt S gemeinsam.

Ist dagegen $r_1 = r_2$, so folgt hieraus und aus (2),(1), daß $M_1M_2A_3A_1$ und $M_1M_2B_2B_1$ Parallelogramme sind (für $M_1M_2B_2B_1$ einschließlich der Entartungsmöglichkeit B_1 , $B_2 \in m$); also sind a, b und m dann alle drei zueinander parallel.

Abb.L 311242:



2.Lösungsweg :

Legt man o.B.d.A ein Koordinatensystem so, daß A_1 , A_2 , M , P in dieser Reihenfolge die Koordinaten (-u;0), (u;0), (0;v), (p;q) mit $u^2+v^2 = p^2+(v-q)^2 = r^2$ haben, so haben M_1 , M_2 Koordinaten (-u-su ; -sv), (u+tu ; -tv) mit $s = r_1:r$ und $t = r_2:r$. Dann ist B_1 der von A_1 verschiedene Schnittpunkt des Kreises

$(x+u+su)^2 + (y+sv)^2 = r_1^2$ mit der Geraden $qx - (u+p)y + uq = 0$, hat also die Koordinaten (-u-su-sp ; -sq). Entsprechend erhält man für B_2 die Koordinaten (u+tu-tp ; -tq). Also hat die Gerade y = 0

durch A_1 , A_2 im Fall $s \neq t$ sowohl mit der - wegen $v \neq 0$ von ihr verschiedenen - Geraden $(s-t)vx - (s+t+2)uy - (s+t+2st)uv = 0$ durch M_1 , M_2 als auch mit der Geraden durch B_1 , B_2 , d.h. mit

$(s-t)qx - \big((s+t+2)u + (s-t)p\big)y - (s+t+2st)uq = 0$, den Punkt mit den Koordinaten $\left(\frac{s+t+2st}{s-t}\cdot u \; ; \; 0\right)$ gemeinsam , während im Fall s = t

drei Geraden y = const vorliegen.

3.Lösungsweg :

Für i = 1;2 gilt: Bei der Streckung σ_i mit dem Zentrum A_i und dem Streckfaktor $c_i = \overrightarrow{A_iM_i} : \overrightarrow{A_iM}$ geht der Kreis k in k_i über; die Punkte M , P gehen in M_i , B_i über. Bezeichnet ferner A_3 den Punkt mit $\overrightarrow{A_2A_3} = c_2 \cdot \overrightarrow{A_2A_1}$ (dieser Punkt gehört insbesondere der Geraden a an), so gehen die Punkte A_1 , B_1 , M_1 bei Hintereinanderausführung von σ_1^{-1} und σ_2 in A_3 , B_2 , M_2 über.

Nun kann man den Satz (beweisen oder als bekannten Sachverhalt zitieren und dann) anwenden, daß sich bei Hintereinanderausführung zweier Streckungen entweder eine Streckung σ oder eine Verschiebung v ergibt, je nachdem, ob das Produkt der Streckfaktoren von 1 verschieden oder gleich 1 ist: Im Fall $c_1^{-1} \cdot c_2 \neq 1$ gehen die Verbindungsgeraden jeweils eines Originalpunktes mit seinem Bildpunkt durch das Zentrum S der genannten Streckung σ; im Fall $c_1^{-1} \cdot c_2 = 1$ sind sie zueinander parallel. Das beendet den geforderten Beweis.

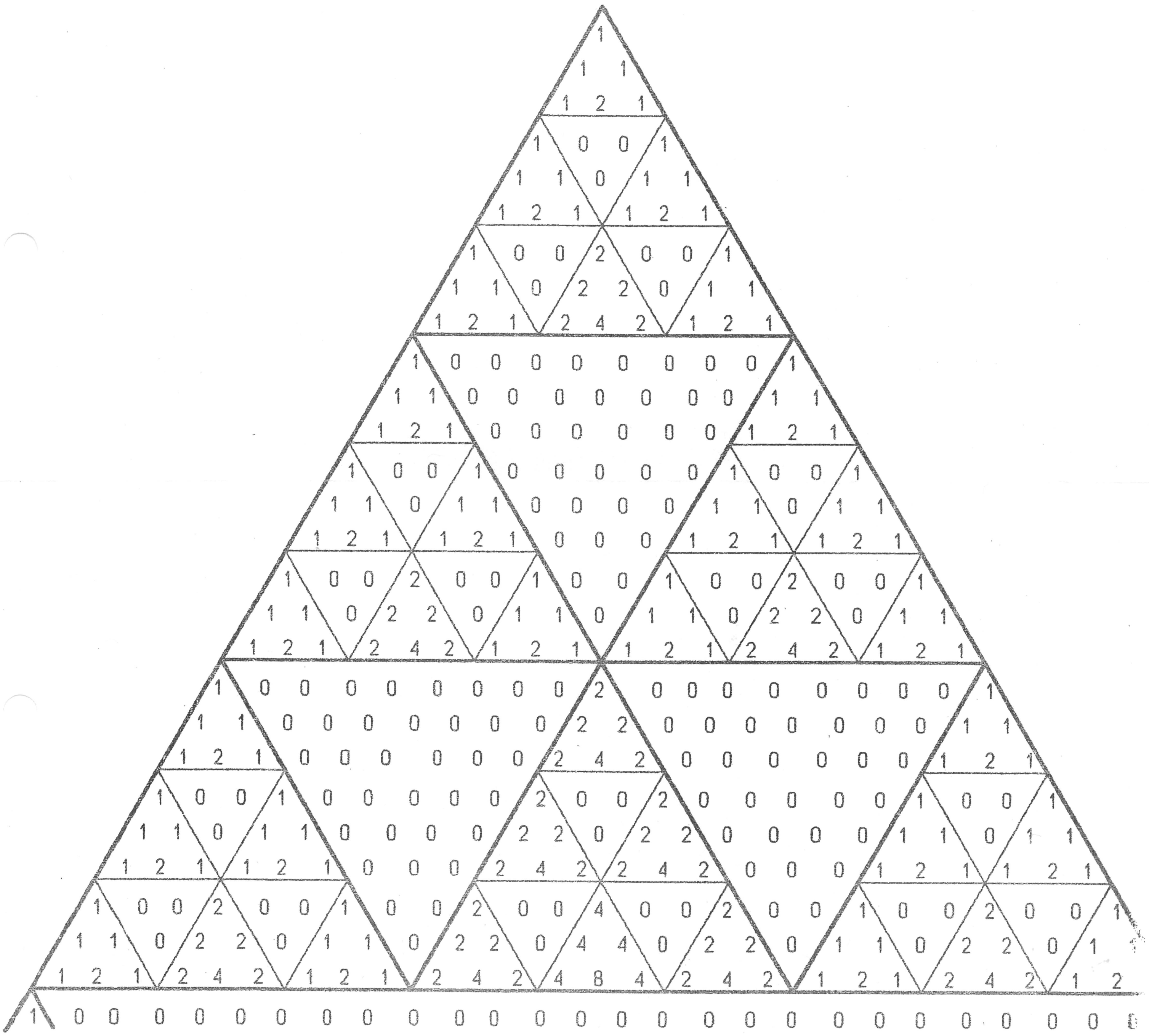
311243 Lösung: 8 Punkte

a) Stellt man unter Verwendung der bekannten Beziehung

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \qquad (n,k \text{ ganz; } k \geq 1,\ n \geq 0) \qquad (1)$$

das Pascalsche Dreieck auf, ersetzt aber jeden Binomialkoeffizienten $z = \binom{n}{k}$ durch seinen Rest $\overline{z}$ bei Division durch p (*Reduktion* mod p, wobei der bekannte Sachverhalt Anwendung findet, daß jeweils $\overline{x} + \overline{y}$ bzw. $\overline{x} \cdot \overline{y}$ denselben Rest läßt wie $\overline{x + y}$ bzw. $\overline{x \cdot y}$), so erhält man für jedes t = 0,1,2,... die folgenden Aussagen (A),(B):

Abb.L 311243


1
1 1
1 2 1
1 0 0 1
1 1 0 1 1
1 2 1 1 2 1
1 0 0 2 0 0 1
1 1 0 2 2 0 1 1
1 2 1 2 4 2 1 2 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1
1 2 1 0 0 0 0 0 0 1 2 1
1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1
1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1
1 2 1 1 2 1 0 0 0 1 2 1 1 2 1
1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1
1 1 0 2 2 0 1 1 0 1 1 0 2 2 0 1 1
1 2 1 2 4 2 1 2 1 1 2 1 2 4 2 1 2 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 0 0 0 0 0 1 1
1 2 1 0 0 0 0 0 0 2 4 2 0 0 0 0 0 0 1 2 1
1 0 0 1 0 0 0 0 0 2 0 0 2 0 0 0 0 0 1 0 0 1
1 1 0 1 1 0 0 0 0 2 2 0 2 2 0 0 0 0 1 1 0 1 1
1 2 1 1 2 1 0 0 0 2 4 2 2 4 2 0 0 0 1 2 1 1 2 1
1 0 0 2 0 0 1 0 0 2 0 0 4 0 0 2 0 0 1 0 0 2 0 0 1
1 1 0 2 2 0 1 1 0 2 2 0 4 4 0 2 2 0 1 1 0 2 2 0 1 1
1 2 1 2 4 2 1 2 1 2 4 2 4 8 4 2 4 2 1 2 1 2 4 2 1 2
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

(A) In den Zeilen für $n = 0$ bis $n = p^{t+1} - 1$ steht ein *Zahlenmuster* M_t, das im Fall $t = 0$ aus den mod p reduzierten Zeilen $n = 0$ bis $n = p-1$ des Pascalschen Dreiecks besteht, während es im Fall $t \geqq 1$ - wenn schon M_{t-1} definiert ist - entsteht, indem man jede Zahl z von M_0 durch das mit z multiplizierte und mod p reduzierte Muster M_{t-1} ersetzt und die zwischen diesen Mustern entstehenden Lücken mit Nullen auffüllt.
(Abb.L 311243 zeigt M_2 für $p = 3$, wobei zur Verdeutlichung der Gewinnung durch (1) die Reduktion mod 3 nur ausgeführt wurde, wenn sie auf 0 führt.)

(B) In jeder Zeile für n sind die Randzahlen (für $k=0$ und $k=n$) gleich 1, in der Zeile speziell für $n = p^{t+1}$ stehen dazwischen nur $p^{t+1} - 1$ Nullen.

Beweis:

I. Für $t = 0$ trifft (A) zu; und auch (B), d.h.

$$\overline{\binom{p}{k}} = 0 \quad (k = 1,\ldots,p-1) \text{ ,} \tag{2}$$

folgt daraus, daß einerseits (als bekannter Sachverhalt oder mit (1) herleitbar) $\binom{p}{k}$ eine ganze Zahl ist, andererseits in der Darstellung $\binom{p}{k} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\cdots\cdot(p-k+1)}{1\cdot\ 2\ \cdot\cdots\cdot\ k}$ der Zähler durch p teilbar ist, der Nenner aber nicht, da p eine Primzahl ist.

II. Werden (A) und (B) für $t-1$ statt t als zutreffend angenommen, so sei (zum Nachweis für t) derjenige Streifen aus p^t Zeilen, der beim Bilden von M_t an die Stelle der Zeile m $(0 \leqq m < p)$ tritt, *der* m*-te* t*-Streifen* genannt. Im 0-ten t-Streifen entstehen nach Annahme unterhalb der in Zeile p^t stehenden Randzahlen 1, da zwischen ihnen p^t-1 Nullen stehen, zwei Kopien des Musters M_{t-1} und zwischen ihnen ergeben sich Nullen; (A) trifft also für den 0-ten t-Streifen zu. Trifft (A) bis zu einem $(m-1)$-ten t-Streifen zu, so gilt bei Anwendung von (1) auf dessen unterste Zeile: Entweder sind dort zwei benachbarte Zahlen der untersten Zeile eines Musters $\overline{z\cdot M_{t-1}}$ zu addieren; dies führt (nach Annahme (B) für $t-1$) auf 0. Oder es sind die Randzahlen zweier benachbarter Muster $\overline{x\cdot M_{t-1}}$, $\overline{y\cdot M_{t-1}}$ (etwa mit $x = \binom{m-1}{k-1}$ und $y = \binom{m-1}{k}$) zu addieren; dies führt nach (1) auf $z = \binom{m}{k}$, woran sich wegen der benachbarten zuvor genannten jejeweils p^t-1 Nullen nach unten in den m-ten t-Streifen hinein ein Muster $\overline{z\cdot M_{t-1}}$ anschließt. Also gilt (A) auch für den m-ten t-Streifen. Die gleiche Argumentation für die unterste Zeile des p-ten t-Streifens ergibt wegen (2), daß auch (B) mit t statt $t-1$ gilt.

b) Nachdem M_t so als das Muster der $\overline{\binom{n}{k}}$ $(0 \leqq k \leqq n < p^{t+1})$ nachgewiesen ist, werde in M_t in der Zeile $n = a_t \cdot p^t + a_{t-1} \cdot p^{t-1} + \cdots + a_0$ die Stelle für $k = b_t \cdot p^t + b_{t-1} \cdot p^{t-1} + \cdots + b_0$ aufgesucht. Die Zeile liegt im a_t-ten t-Streifen von M_t ; die Stelle für k gehört in diesem Streifen entweder zum b_t-ten Muster $\overline{\binom{a_t}{b_t} \cdot M_{t-1}}$ oder zur darauffolgenden mit Nullen ausgefüllten Lücke. Das Letztgenannte ist der Fall, wenn $b_{t-1} > a_{t-1}$ gilt, woraus $\binom{a_{t-1}}{b_{t-1}} = 0$ folgt. Andernfalls gilt genauer: Das zum gefundenen Muster $\overline{\binom{a_t}{b_t} \cdot M_{t-1}}$ gehörende Teilstück der aufzusuchenden Zeile liegt im a_{t-1}-ten $(t-1)$-Streifen dieses Musters, die aufzusuchende Stelle ist darin die $(b_{t-1} \cdot p^{t-1} + \cdots + b_0)$-te Stelle und gehört in diesem Streifen entweder zum b_{t-1}-ten Muster $\overline{\binom{a_t}{b_t} \cdot \binom{a_{t-1}}{b_{t-1}} \cdot M_{t-2}}$ oder zur darauffolgenden mit Nullen ausgefüllten Lücke; Letzteres im Fall $b_{t-2} > a_{t-2}$.

So fortfahrend erhält man: An der k-ten Stelle der n-ten Zeile steht in M_t - sowohl in dem Fall, daß einmal $b_j > a_j$, also $\binom{a_j}{b_j} = 0$ gilt, als auch im entgegengesetzten Fall - die mod p reduzierte Zahl $\binom{a_t}{b_t} \cdot \binom{a_{t-1}}{b_{t-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{a_0}{b_0}$, w.z.b.w.

<u>Bemerkung zur Korrektur:</u> Eine Beweisdarstellung ist einerseits auch ohne geometrische Hilfsvorstellung rein rechnerisch möglich. Andererseits kann auch eine noch stärker auf die Analogie zu bekannten geometrischen (fraktalen) Punktmengen verweisende - und damit ggf. verbal kürzere - Darstellung akzeptiert werden.

Vorschläge zur Punktverteilung

311241

Rechnerische Umformungen 3

Logische Schlußfolgerungen bis zur Ungleichung x<y 3

6

311242

Je nach Lösungsweg z.B. folgende zwei Schritte:

1)Winkel-Gleichheiten, Parallelitätsaussagen, Strahlensatz ...
oder: Koordinaten der zu betrachtenden Punkte ....
oder: Einführung von Streckungen mit Angabe von Zuordnungen Originalpunkt-Bildpunkt 3

2)Fall-Trennung; Herleitung der Schnitt- bzw. Parallelitätsaussage 3

6

311243

Nutzung der Binomialkoeffizienten-Addition (oder entsprechendes anderes rechnerisches Hilfsmittel) 1

(Beweis u.) Nutzung d. Teilbarkeit von $\binom{n}{k}$ (0<k<p) durch p 2

Ersichtliches Auffinden der Muster-Struktur (oder einer gleichwertigen Darstellung) 3

Abschließender Übergang zur behaupteten Produktdarstellung 2

8

31. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe

Lösungen

Olympiadeklassen 11-13

2.Tag

311244 Lösung: 7 Punkte

Die Fußpunkte der von S auf die Ebene durch P_1, P_2, P_3 sowie auf die Geraden durch P_2, P_3 bzw. P_3, P_1 bzw. P_1, P_2 gefällten Lote seien H sowie F_1 bzw. F_2 bzw. F_3. Da die Richtung von SH zu allen Geraden in der Ebene durch P_1, P_2, P_3 senkrecht ist, ist sie auch zu P_2P_3 senkrecht. Hieraus und aus $SF_1 \perp P_2P_3$ folgt: P_2P_3 ist zu allen Geraden in der Ebene durch S, H, F_1 senkrecht, also gilt auch $P_2P_3 \perp HF_1$. Ebenso folgt $P_3P_1 \perp HF_2$ und $P_1P_2 \perp HF_3$.

Mit $h = \overline{SH}$, $a_1 = \overline{P_2P_3}$, $a_2 = \overline{P_3P_1}$, $a_3 = \overline{P_1P_2}$

und $h_i = \overline{SF_i}$, $x_i = \overline{HF_i}$ $(i = 1,2,3)$

(Abb.L 311244) ergibt sich dann: Der Flächeninhalt der Pyramidenoberfläche ist

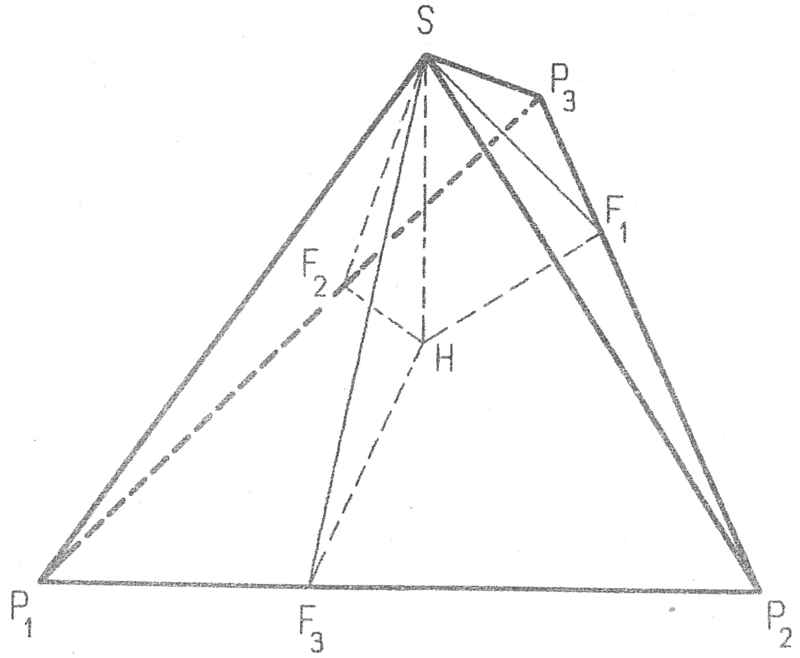
$$J = F + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} a_i \cdot h_i = F + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} a_i \cdot \sqrt{x_i^2 + h^2} . \qquad (1)$$

Wegen

$$x_i^2 + h^2 = \frac{(x_i^2 + h^2)\cdot(r^2 + h^2)}{r^2 + h^2} = \frac{(rx_i + h^2)^2 + (x_i - r)^2\cdot h^2}{r^2 + h^2}$$

folgt hiermit der in a) geforderte Nachweis für die Aussage, daß J genau dann einen kleinstmöglichen Wert hat, wenn $x_i = r$ für $i = 1,2,3$ gilt, d.h. genau im Fall H = M. Nach (1) und

Abb.L 311244:



wegen $F = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} a_i \cdot r$, also $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} a_i = \frac{F}{r}$

sowie $V = \frac{1}{3} F h$, also $F \cdot h = 3V$

beträgt dieser kleinstmögliche Wert

$$J = F + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} a_i \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = F + \frac{F}{r} \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = F + \sqrt{F^2 + \left(\frac{3V}{r}\right)^2} ,$$

wie in b) behauptet.

<u>311245 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Wenn eine Funktion f den Bedingungen der Aufgabe genügt, so folgt: Nach (2) für x=1, y=0 sowie nach (3) ist $a \cdot f(0) = 2a$, wegen $a \neq 0$ also

$$f(0) = 2 . \tag{4}$$

Nach (2) für alle ganzzahligen $x \geqq 1$ und für y=1 sowie nach (3) ist ferner $f(x) \cdot a = f(x+1) + f(x-1)$, also

$$f(x+1) = a \cdot f(x) - f(x-1) \quad (x = 1,2,3,\ldots). \tag{5}$$

Ein geschlossener Ausdruck für f(x) kann[1] folgendermaßen erhalten werden: Führt man in (5) eine Konstante b ein, die

$$a = b + \frac{1}{b} \tag{6}$$

erfüllt[2], so ergibt sich durch vollständige Induktion, daß

$$f(x) = b^x + \frac{1}{b^x} \tag{7}$$

für alle x = 0,1,2,... gilt: Wegen (4),(3),(6) gilt (7) für x=0 und x=1; und aus der Annahme, mit einer ganzen Zahl $n \geqq 1$ gelte (7) für alle ganzzahligen $x \leqq n$, folgt

---

[1] Durch (4),(3) und (5) sind alle gesuchten Funktionswerte eindeutig bestimmt. Wird dies als Argument für die Einzigkeit von f angegeben, so kann sich anstelle der oben über (6)-(8) erfolgenden Herleitung auch sogleich die Definition (9) und der Nachweis II. anschließen.

[2] Ein heuristisches Motiv zu diesem Ansatz ist z.B.: Man versucht, f als Summe zweier Funktionen u,v zu finden, die durch einfachere geschlossene Ausdrücke als f gegeben sind. Dann führt (2) für x=y sowie (4) auf $u(x)^2+2u(x) \cdot v(x)+v(x)^2=u(2x)+v(2x)+2$. Weiter kann man ansetzen, dies sowohl durch die zusätzliche Forderung $u(x) \cdot v(x) = 1$ als auch dadurch zu vereinfachen, daß man getrennt $u(x)^2 = u(2x)$ und $v(x)^2 = v(2x)$ fordert. Diese Forderungen werden ersichtlich von $u(x) = b^x$ und $v(x) = \frac{1}{b^x}$ erfüllt. Man hat damit für x = 1 den obigen Ansatz. Auch die Funktion (7) selbst liegt hier vor. Man kann sie - ohne Begründung -, sogar gleich als (9), definieren und wie in II. für sie (1)-(3) bestätigen; freilich steht dann noch der Einzigkeitsbeweis I. aus [wenn er nicht z.B. gemäß der vorigen Fußnote mit (4),(3),(5) erfolgt].

$$f(n+1) = \left(b + \frac{1}{b}\right)\cdot f(n) - f(n-1)$$
$$= \left(b + \frac{1}{b}\right)\cdot\left(b^n + \frac{1}{b^n}\right) - \left(b^{n-1} + \frac{1}{b^{n-1}}\right)$$
$$= b^{n+1} + \frac{1}{b^{n+1}} ,$$

also (7) für $x = n+1$.
Die Gleichung (6) ist äquivalent dazu, daß $b \neq 0$ und $b^2-ab+1 = 0$ gilt, was wegen $a \geq 2$ genau dann zutrifft, wenn b eine der Zahlen

$$b_{1;2} = \frac{1}{2}\cdot\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4}\right) \tag{8}$$

ist. Da für diese Zahlen $b_1 \cdot b_2 = 1$ gilt, hat die Wahl unter ihnen keinen Einfluß auf (7), und man kann (7) z.B. in der Gestalt

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\cdot\left(a + \sqrt{a^2 - 4}\right)\right)^x + \left(\frac{1}{2}\cdot\left(a - \sqrt{a^2 - 4}\right)\right)^x \tag{9}$$

schreiben.
Also kann eine Funktion f nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie durch (7) mit einem b aus (8) [oder, äquivalent hierzu, durch (9)] gegeben ist.

II. Diese Funktion erfüllt (1) und wegen (6) auch (3); ferner erfüllt sie wegen

$$\left(b^x + \frac{1}{b^x}\right)\cdot\left(b^y + \frac{1}{b^y}\right) = b^{x+y} + \frac{1}{b^{x+y}} + b^{x-y} + \frac{1}{b^{x-y}}$$

auch (2).

Somit erfüllt genau die genannte Funktion die Bedingungen der Aufgabe.

<u>311246 A Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Für je n (≥ 2) positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt: Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel erfüllen $s = a_1 + \cdots + a_n$ und $t = a_1^2 + \cdots + a_n^2$ <u>für jedes i = 1,...,n</u> die Ungleichung

$$\left(\frac{s - a_i}{n-1}\right)^2 \leq \frac{t - a_i^2}{n-1} ,$$

also

$$(s - a_i)^2 \leq (n-1)\cdot(t - a_i^2) .$$

Ist nun $s = n\cdot c$ und $t = 2n\cdot c^2$, so folgt weiter

$$n^2c^2 - 2nca_i + a_i^2 \leq 2n^2c^2 - 2nc^2 - na_i^2 + a_i^2 .$$

Wegen $n \neq 0$ folgt

$$(a_i - c)^2 \leq (n-1)\cdot c^2 ,$$

wegen $n-1 > 0$ und $c > 0$ also

$$a_i \leq (1 + \sqrt{n-1})\cdot c .$$

Daher gibt es <u>keine</u> Zahlen n, c, a_i , mit denen <u>alle</u> Bedingungen der Aufgabe erfüllt wären.

311246 B Lösung: 6 Punkte

Für jede positive ganze Zahl n gilt, wenn k eine ganze Zahl größer als $\frac{n}{2}$ ist: Der Zeitraum von (beliebig gewählten) 8k aufeinanderfolgenden Jahren besteht aus einer Anzahl A von Tagen, für die

$$A \geqq 365 \cdot 8k + k \qquad (1)$$

gilt. Wird für $i = 1,2,\ldots,A$ jeweils die Anzahl der Blätter, die der Autor in den ersten i Tagen dieses Zeitraums insgesamt gefüllt hat, mit x_i bezeichnet, so gilt nach Voraussetzung ferner

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_A \leqq 730 \cdot 8k \ . \qquad (2)$$

Jede der positiven ganzen Zahlen

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ \ldots \ , \ x_A \ , \ x_1 + n \ , \ x_2 + n \ , \ \ldots \ , \ x_A + n \qquad (3)$$

ist folglich nicht größer als $730 \cdot 8k + n$. Für ihre Anzahl 2A gilt wegen (1) und $k > \frac{n}{2}$ aber $2A \geqq 730 \cdot 8k + 2k > 730 \cdot 8k + n$. Also müssen sich nach dem Schubfachschluß unter den Zahlen (3) mindestens zwei einander gleiche befinden. Nach (2) sind jedoch keine zwei der Zahlen $x_1 , x_2 , \ldots , x_A$ einander gleich und auch keine zwei der Zahlen $x_1 + n , x_2 + n , \ldots , x_A + n$. Daraus folgt die Existenz von i und j mit $1 \leqq i,j \leqq A$ und

$$x_i = x_j + n \ . \qquad (4)$$

Wegen $n > 0$ ist hierfür $i > j$, und (4) besagt: In dem Zeitraum vom (j+1)-ten bis zum i-ten Tag wurden genau n Blätter gefüllt.

Vorschläge zur Punktverteilung

311244

Vorbereitende Zusammenhänge, z.B. Herleitung benötigter Aussagen über Senkrechtstehen u. damit Gewinnung von (1) 2

Abschätzung gegenüber dem Fall $x_i = r$ $(i=1,2,3)$, d.h. $H = M$ (einschließlich Diskussion der Gleichheit) 3

Beweis der Formel für J im Fall $H = M$ 2

7

311245

Ermittlung einzelner (zur weiteren Herleitung nutzbarer) Funktionswerte 2

Herleitung der Einzigkeit der Funktion, z.B. als Herleitung von (7) mit (8) 3

Nachweis, daß die Bedingungen von der angegebenen Funktion werden 2

7

311246 A

Gewinnung einer (zur weiteren Herleitung nutzbaren) Ungleichung, z.B. $(s-a_i)^2 \leqq (n-1)\cdot(t-a_i^2)$ 3

Weitere Herleitung der Unmöglichkeit, alle Bedingungen zu erfüllen 3

6

311246 B

Nutzung der Anzahlen von Tagen pro Jahr, etwa in (1) 1

Nutzung der Bedingungen über die Blätterzahl (pro Tag $\geqq 1$, pro Jahr $\leqq 730$) 2

Anwendung des Schubfachschlusses (oder einer gleichwertigen Argumentation) zur Herleitung der für jedes n nachzuweisenden Existenz von eines Zeitraums, in dem genau n Blätter gefüllt werden 3

6