A 12;I

31. Mathematik-Olympiade

Aufgaben

Olympiadeklassen 11-13

1.Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
*Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.*

311231

Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist; ferner sei folgende Voraussetzung erfüllt: Mit zwei voneinander verschiedenen reellen Zahlen a, b gelten für jedes reelle x die Gleichungen $f(a-x) = f(a+x)$ und $f(b-x) = f(b+x)$.
Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Funktion f ist periodisch.
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn eine positive reelle Zahl p existiert, mit der für jedes reelle x die Gleichung $f(x+p) = f(x)$ gilt.

311232

Man beweise, daß jedes konvexe Viereck ABCD, in dem die Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ betragen und die Innenwinkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ die Größen $\beta$ bzw. $\gamma$ haben, den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2}\left(ab\cdot\sin\beta + bc\cdot\sin\gamma - ac\cdot\sin(\beta+\gamma)\right)$$

hat.

*Von den nachstehenden Aufgaben* 311233A *und* 311233B *ist* genau eine *auszuwählen und zu lösen:*

311233 A

Man beweise, daß es unter allen Werten, die der Term

$$\sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{x^2+y^2-2x+2y+2} + \sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5} + \sqrt{x^2+y^2-4x+4y+8}$$

für reelle Zahlen x,y annehmen kann, einen kleinsten Wert gibt, und man ermittle diesen kleinsten Wert.

311233 B

Es sei $n \geq 2$ die Anzahl der Teilnehmer an einer Feier. Für je zwei Teilnehmer A,B seien die folgenden beiden Aussagen wahr:

(1) Ist A mit B bekannt, so gibt es keinen von A und B verschiedenen Teilnehmer, der sowohl mit A als auch mit B bekannt wäre.

(2) Ist A nicht mit B bekannt, so gibt es genau zwei von A und B verschiedene Teilnehmer, die sowohl mit A als auch mit B bekannt sind.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets gilt: Alle Teilnehmer haben auf dieser Feier dieselbe Zahl von Bekannten.
Hinweis: Für je zwei Teilnehmer A,B gelte: Ist A mit B bekannt, so auch B mit A. Kein Teilnehmer gelte als mit sich selbst bekannt.

# 31. Mathematik-Olympiade
## Aufgaben
## Olympiadeklassen 11-13
## 2.Tag

### 311234

Für jede natürliche Zahl $a>0$ ermittle man alle diejenigen natürlichen Zahlen $n>0$, die die Ungleichung $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n+1}>a$ erfüllen.

### 311235

Man untersuche, ob sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 100 fünfzig verschiedene so auswählen lassen, daß ihre Summe 2525 beträgt und daß keine zwei von ihnen die Summe 101 haben.

### 311236

Es seien alle diejenigen Pyramiden ABCS betrachtet, die den folgenden Bedingungen (1),(2),(3) genügen:

(1) Die Grundfläche ABC der Pyramide hat den Flächeninhalt 1.

(2) Es gilt $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{SB}=\overline{SC}$ .

(3) Es gilt $\overline{BC}=\overline{SA}$ .

Man untersuche, ob es unter allen Pyramiden, die diese Bedingungen erfüllen, eine mit größtem Volumen gibt. Wenn dies der Fall ist, so ermittle man für eine solche Pyramide die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ .

# 31. Mathematik-Olympiade

# Lösungen

# Olympiadeklassen 11-13

## 1.Tag

**311231 Lösung:** 5 Punkte

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a > b$ vorausgesetzt werden; dann ist $2a-2b$ eine positive reelle Zahl. Wendet man die erste vorausgesetzte Gleichung mit $x+a-2b$ statt $x$ und dann die zweite vorausgesetzte Gleichung mit $b-x$ statt $x$ an, so folgt: Für jedes reelle $x$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+2a-2b) &= f(a+(x+a-2b)) \\ &= f(a-(x+a-2b)) = f(b+(b-x)) \\ &= f(b-(b-x)) = f(x) \;. \end{aligned}$$

Mit der positiven reellen Zahl $p = 2a-2b$ gilt also $f(x+p) = f(x)$ für jedes reelle $x$. Somit ist $f$ periodisch.

**311232 Lösung:** 7 Punkte

Ist $P$ ein Polygon, so bezeichne $J(P)$ seinen Flächeninhalt. Für jedes konvexe Viereck $ABCD$ liegt einer der drei folgenden Fälle vor:

I. Es gilt $AB \parallel DC$ (Abb.L 311232 a).
II. Die Verlängerungen von $BA$ über $A$ hinaus und von $CD$ über $D$ hinaus schneiden sich in einem Punkt $E$ (Abb.L 311232 b).
III. Die Verlängerungen von $AB$ über $B$ hinaus und von $DC$ über $C$ hinaus schneiden sich in einem Punkt $F$ (Abb.L 311232 c).

Im <u>Fall I</u> ist $J(ABCD) = J(ABC)+J(ACD)$, wegen $AB\parallel CD$ also

$$= J(ABC)+J(BCD) = \frac{1}{2}\, ab\cdot\sin\beta + \frac{1}{2}\, bc\cdot\sin\gamma \;.$$

Wegen $\beta+\gamma = 180^\circ$, also $\sin(\beta+\gamma) = 0$, ist das im Fall I die behauptete Formel.

In den Fällen II und III bezeichne $S$ den (wegen der Konvexität existierenden und im Innern von $ABCD$ gelegenen) Schnittpunkt der Strecken $AC$ und $BD$. Im Fall II ist $\overline{\measuredangle AED} = 180^\circ-(\beta+\gamma)$, im Fall III dagegen $\overline{\measuredangle AFD} = \beta+\gamma-180^\circ$. Damit ergibt sich

im <u>Fall II</u> mit $p = \overline{AE}$, $q = \overline{DE}$

$$\begin{aligned} J(ABCD) = {} & J(ABC) + J(CDS) + J(ADS) + J(BED) - J(BED) \\ & + J(BCS) - J(BCS) \\ & + J(CDS) - J(CDS) \\ & + J(AED) - J(AED) \\ = {} & J(ABC) + J(BCD) + J(AEC) + J(BED) - J(BEC) - J(AED) \\ = {} & \frac{1}{2}\, ab\cdot\sin\beta + \frac{1}{2}\, bc\cdot\sin\gamma \\ & + \frac{1}{2}\,(p(c+q) + (a+p)q - (a+p)(c+q) - pq)\cdot\sin\overline{\measuredangle AED} \,, \\ = {} & \frac{1}{2}\,(ab\cdot\sin\beta + bc\cdot\sin\gamma - ac\cdot\sin\overline{\measuredangle AED}) \;; \end{aligned}$$

im Fall III mit $u = \overline{BF}$ , $v = \overline{CF}$

$$
\begin{array}{rlllll}
J(ABCD) = & J(ABC) + J(CDS) + J(ADS) & & & & \\
 & \quad + J(BCS) & & + J(BFC) & & - J(BFCS) \\
 & & + J(CDS) & & & - J(CDS) \\
 & & + J(AFC) & & - J(AFC) & \\
\end{array}
$$

$$= J(ABC) + J(BCD) + J(AFD) + J(BFC) - J(AFC) - J(BFD)$$

$$= \frac{1}{2}\, ab\cdot\sin\beta + \frac{1}{2}\, bc\cdot\sin\gamma$$

$$\qquad + \frac{1}{2}\, ((a+u)(c+v) + uv - (a+u)v - u(c+v))\cdot\sin\overline{\measuredangle AFD}$$

$$= \frac{1}{2}\, (ab\cdot\sin\beta + bc\cdot\sin\gamma + ac\cdot\sin\overline{\measuredangle AFD}\ )$$

und damit in beiden Fällen wegen $\sin(180^\circ-(\beta+\gamma)) = \sin(\beta+\gamma)$ bzw. $\sin(\beta+\gamma-180^\circ) = -\sin(\beta+\gamma)$ die behauptete Formel.

Abb.L 311232 a:

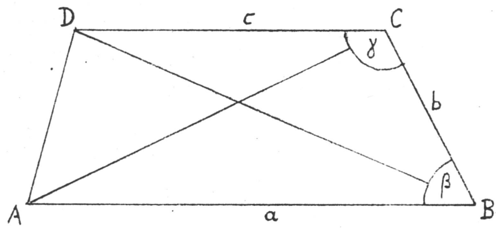



Abb.L 311232 b:

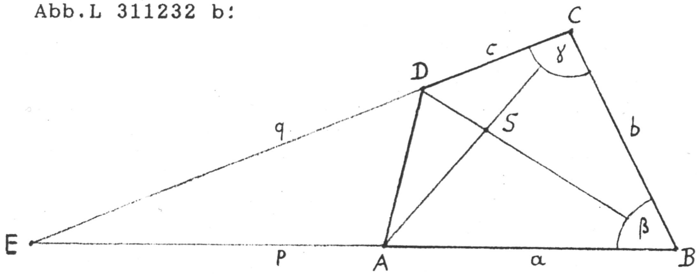
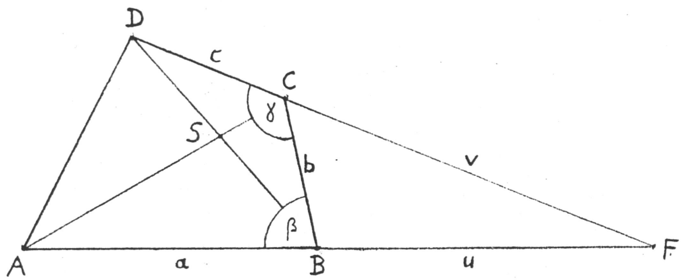



Abb.L 311232 c:



311233 A Lösung: 7 Punkte

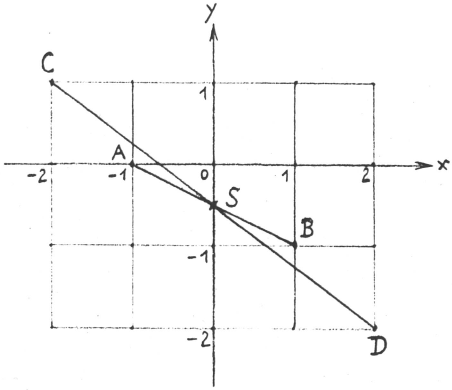



Abb.L 311233 A

Die Summanden in dem zu untersuchenden Term t können als Streckenlängen aufgefaßt werden: Sind A,B,C,D bzw. P die Punkte, die in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten (-1;0),(1;-1),(-2;1),(2;-2) bzw. (x,y) haben, so ist $t = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP}$ .

Für die Punkte A,B,C,D gilt[1]: Sie sind nicht kollinear, und die Strecken AB und CD haben den Punkt S mit den Koordinaten $(0;-\frac{1}{2})$ als Schnittpunkt.

Für jeden Punkt P der Ebene gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB} , \qquad (1)$$

$$\overline{CP} + \overline{DP} \geq \overline{CD} . \qquad (2)$$

In (1) steht genau dann das Gleichheitszeichen, wenn P der Strecke AB angehört; in (2) genau dann, wenn P der Strecke CD angehört. Somit ist stets $t \geq \overline{AB} + \overline{CD}$ , und darin gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn P beiden Strecken angehört, d.h. P = S ist. Damit ist bewiesen: Es gibt einen kleinsten Wert, den t annehmen kann; er beträgt

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-0)^2} + \sqrt{(2+2)^2 + (-2-1)^2} = 5 + \sqrt{5} .$$

---

[1] Dies kann einer Zeichnung unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeit der Koordinaten von A,B,C,D entnommen werden oder z.B. aus den Vektorgleichungen $\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SB} = (-1;\frac{1}{2})$ , $\overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{SD} = (-2;\frac{3}{2})$ und der linearen Unabhängigkeit dieser beiden Vektoren geschlossen werden. - Nicht vollständig ausreichend wäre es z.B., den Punkt S nur als Schnittpunkt der beiden *Geraden* durch A,B bzw. durch C,D (rechnerisch) zu ermitteln.

311233 B Lösung: 7 Punkte

Ist $n=2$, so sind die beiden Teilnehmer miteinander bekannt; denn andernfalls folgte aus (2) der Widerspruch, daß es mindestens 4 Teilnehmer gäbe.
Also haben beide Teilnehmer die gleiche Zahl (nämlich 1) von Bekannten, wie behauptet.

Ist $n>2$, so hat jeder Teilnehmer mindestens 2 Bekannte unter den Teilnehmern; denn hätte ein Teilnehmer weniger als 2 Bekannte, wäre wegen $n>2$ also mit mindestens einem anderen Teilnehmer nicht bekannt, so führte (2) auf den Widerspruch, daß er doch mindestens 2 Bekannte haben müßte.
Für je zwei Teilnehmer A,B folgt nun:

I. Sind A,B miteinander bekannt, so seien

$$B, X_1, \ldots, X_k \text{ die sämtlichen Bekannten von } A,$$

$$A, Y_1, \ldots, Y_m \text{ die sämtlichen Bekannten von } B$$

($B, X_1, \ldots, X_k$ paarweise voneinander verschieden, $A, Y_1, \ldots, Y_m$ paarweise voneinander verschieden; $k, m \geq 1$, wie soeben gezeigt). Für jedes i mit $1 \leq i \leq k$ gilt dann: Da B und $X_i$ den gemeinsamen Bekannten A haben, sind sie nach (1) nicht miteinander bekannt und haben somit nach (2) außer A noch genau einen weiteren gemeinsamen Bekannten. Das heißt: $X_i$ ist mit genau einer der Personen $Y_1, \ldots, Y_m$ bekannt.

Ebenso folgt für jedes j mit $1 \leq j \leq m$ , daß $Y_j$ mit genau einer der Personen $X_1, \ldots, X_k$ bekannt ist.

Daher und wegen der im Hinweis genannten Symmetrie des Bekanntseins entsteht eine umkehrbar eindeutige Abbildung von der Menge $\{X_1, \ldots, X_k\}$ auf die Menge $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$, wenn man jeder Person $X_i$ die ihr bekannte unter den $Y_1, \ldots, Y_m$ zuordnet. Also ist $k = m$; d.h., A und B haben die gleiche Zahl $k+1 = m+1$ von Bekannten.

II. Sind A,B nicht miteinander bekannt, so folgt: Nach (2) haben sie (mindestens) einen gemeinsamen Bekannten C. Wie eben in I. gezeigt, haben A und C die gleiche Zahl von Bekannten; dasselbe gilt für B und C. Also haben auch A und B die gleiche Zahl von Bekannten.

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

# 31. Mathematik-Olympiade
## Hinweise zur Korrektur, Vorschläge zur Punktverteilung

### Olympiadeklassen 11-13
### 1.Tag

Für jede Aufgabe ist die zum Lösungstext genannte Gesamtpunktzahl beizubehalten, während die unten skizzierte weitere Aufteilung im Sinn eines Vorschlags gegeben wird und als Grundlage zur individuellen Einschätzung der vom Schüler erbrachten *Bestandteile* *eines zum Ziel führenden* Lösungsweges dient („additive Punktvergabe", auch bei insgesamt unvollständiger Lösung und ohne Festlegung auf einen bestimmten Lösungsweg. „Erbracht" heißt „im Text *ersichtlich*", nicht nur hinein-interpretiert.)
Die hier gegebenen Lösungstexte selbst sind als Angabe derartiger Bestandteile eines möglichen vollständigen Lösungsweges konzipiert; sie sind *nicht etwa* „*Musterlösungen*", die in angegebener Formulierung vom Schüler zu erwarten wären. So sollen z.B. „übertrieben genaue" Formulierungen auf Lösungsteile hinweisen, die in verschiedenartigen schülergemäßen Fassungen erbracht werden können, aber jedenfalls (bei Wahl dieses Lösungsweges) nicht fehlen dürfen. Gelegentlich enthält der Lösungstext auch - in Gestalt von Fußnoten, „Hinweisen", „Bemerkungen" oder in Klammern gesetzten Texteinschüben - Angaben, die zu einem vollständigen Lösungsweg nicht erforderlich sind.
Das *Zitieren* eines ohne Beweis benutzten mathematischen Sachverhaltes ist als ausreichender Teilschritt (anteilig) zu werten, wenn es mit üblicher oder genügend deutlicher Kennzeichnung geschieht (z.B. „Jensensche Ungleichung", „Winkelsumme im Tangentenviereck") oder durch inhaltliche Angabe erfolgt (z.B. Voraussetzung und Behauptung eines Satzes). Im Sinne einer Grenzfall-Problematik ist bei Auftreten der Frage zu handeln, ob ein Zitat nicht akzeptabel sei, da laut Aufgabentext ein Beweis(schritt) als *gefordert* anzusehen sei. Ähnliches gilt zur Frage der Anerkennung *anschaulicher* Beweismittel und zum Akzeptieren altersgerechter Beweislücken. Beispiel: Zwar möglicherweise Verzicht auf *Beweis zu* (bzw. Herleitung aus) geometrischen *Lageaussagen*; aber Forderung nach *Berücksichtigung* aller Lagemöglichkeiten.

Punktverteilungsvorschläge:

311231

Rechnerische Folgerungen aus den Voraussetzungen .............. 3

Schluß auf die Periodizität .................................. 2

5

311232

Je nach dem Lösungsaufbau sind verschiedene Abschnitte (z.B. die Behandlung der Fälle I,II,III) einzuschätzen. Die folgenden Motive werden darin z.T. mehrmals auftreten; die Punktzahlen sind dann sinngemäß aufzuteilen.

Zerlegungs- (oder Ergänzungs-)schritte für Flächen (möglicherweise auch in rechnerischer Ausführung), dabei auch Berücksichtigung von (etwa in Falldiskussion erhaltenen) Lagebeziehungen ................................ 3

Anwendung (goniometrischer und anderer) trigonometrischer Sätze ................................ 2

Weitere (insbesondere rechnerische) Schritte zur (im jeweiligen Fall) abschließenden Gewinnung der geforderten Formel ... 2

7

311233 A

(Bei Wahl eines Lösungsweges durch Deutung der Summanden als Streckenlängen:)

Begründung der Minimalität der Summe im Fall P = S:

Nachweis von S als Schnittpunkt der Strecken AB,CD .... 2

Herleitung der Minimalität (z.B. mit Zitat der Dreiecksungleichung; bei Berufung auf „Gerade als kürzeste Verbindung" ist auf korrekte Verwendung einzuschätzen) ................................ 3

Ermittlung des minimalen Wertes ........................ 2

(Bei Lösungsansätzen mit Differentialrechnung:)

Bilden und Nullsetzen der Ableitung ........................ 2

Nullstellenermittlung (schülergemäß noch am ehesten in Näherungsrechnung zu erwarten [dies kann akzeptiert werden]) ................................ 3

Nachweis als globales Minimum, Wert des Minimums ............ 2

7

311233 B

Vorbereitende Beweisteile (z.B. getrennte Behandlung des Falles n = 2; Nachweis, daß jeder Teilnehmer mindestens 2 Bekannte hat) ............ 2

Beweis für miteinander bekannte A,B ........................ 3

" " nicht miteinander bekannte A,B ................ 2

7

# 31. Mathematik-Olympiade
## Lösungen
## Olympiadeklassen 11-13
## 2.Tag

<u>311234 Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Für die Summen $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$
zeigen wir:

I. Für jedes $n \geq 2$ gilt $s_{n-1} < s_n$.

Beweis: Es gilt
$$27n^2 - 3 < 27n^2 - 1 ,$$
also $$3(3n-1)(3n+1) < 3n(3n+1) + (3n-1)(3n+1) + 3n(3n-1) .$$
Nach Division durch die positive Zahl $3n(3n-1)(3n+1)$ folgt
$$\frac{1}{n} < \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}$$
und daraus nach Addition von $\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2}$ die Behauptung.

II. Für jedes $n \geq 1$ gilt $s_n < 2$.

Beweis: Da alle Summanden in $s_n$ kleiner oder gleich $\frac{1}{n+1}$ sind und ihre Anzahl $2n+1$ beträgt, gilt
$$s_n < \frac{2n+1}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1} = 2 .$$

Wegen $s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$ und I. gilt $1 < s_1 < s_2 < \cdots$, also $1 < s_n$ für alle $n = 1,2,3,\ldots$ ; hiermit und mit II. ist bewiesen:
Ist <u>$a=1$</u> , so gilt $s_n > a$ für <u>alle</u> natürlichen Zahlen $n>0$ ,
ist aber <u>$a \geq 2$</u> , so gilt $s_n > a$ für <u>keine</u> natürliche Zahl $n>0$ .

<u>311235 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Eine Auswahl der genannten Art ist möglich. Um dies zu beweisen, genügt es, in einem Beispiel eine Auswahl anzugeben und die geforderten Eigenschaften für diese Auswahl zu bestätigen.
Eine solche Auswahl ist z.B.:

$$4,6,8,\ldots,78 \quad ; \quad 84,86,88,\ldots,100 \quad ; \quad 19,21 \quad ; \quad 99 \quad .$$

Die Anzahl bzw. die Summe der ausgewählten Zahlen sind nämlich
$$38 + 9 + 2 + 1 = 50 ,$$
bzw. $$\frac{38\cdot 82}{2} + \frac{9\cdot 184}{2} + 40 + 99 = 2525 ,$$
und für je zwei ausgewählte Zahlen a,b ist bei geeigneter Reihenfolge
$$(a+b \text{ gerade}) \quad \text{oder} \quad (a \leq 78 \text{ und } b \leq 21)$$
$$\text{oder} \quad (a \geq 4 \text{ und } b=99) \quad \text{oder} \quad (a \geq 84 \text{ und } b \geq 19) ,$$
also $a+b \neq 101$.

<u>Bemerkung:</u> Zu einem solchen Beispiel kann man folgendermaßen gelangen: Die Summe der 50 geraden Zahlen von 2 bis 100 ist 2550. Um sie zu verkleinern, kann man eine Anzahl k von Summanden ersetzen,

etwa jeweils $2p_i$ durch $101-2p_i$ $(i = 1,\ldots,k)$. Dann ist keine Summe aus einem neuen Summanden $101-2p_i$ und einem nicht ersetzten $2q$ $(q \neq p_i)$ gleich 101. Die gewünschte Verkleinerung um 25 tritt ein, wenn $s=p_1+\cdots+p_k$ die Bedingung $2s-25 = k\cdot 101-2s$, d.h. $4s=k\cdot 101+25$ erfüllt; etwa mit $k=3$ und z.B. $p_1=1$, $p_2=40$, $p_3=41$ gelingt dies. Heuristische Ausführungen dieser Art sind (zwar nützlich, aber) zu einer vollständigen Lösung wie oben nicht erforderlich.

8 Punkte

311236 Lösung:

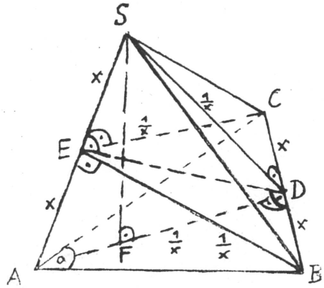



Abb.L 311236

Für jede Pyramide mit (1),(2),(3) seien D bzw. E die Mittelpunkte von BC bzw. SA, gemäß (3) sei

$$\overline{BD} = \overline{DC} = \overline{SE} = \overline{EA} = x .$$

In den nach (2),(3) gleichschenkligen, einander kongruenten Dreiecken ABC, SBC, BSA, CSA sind die Seitenhalbierenden AD, SD, BE, CE zugleich Höhen; nach (1) beträgt ihre Länge

$$\overline{AD} = \overline{SD} = \overline{BE} = \overline{CE} = \frac{1}{x} .$$

Also sind auch die Dreiecke DSA, EBC gleichschenklig, ihre Seitenhalbierende DE ist Höhe. Im rechtwinkligen Dreieck AED gilt $\overline{AD} > \overline{EA}$, $\frac{1}{x} > x$, so daß x nur Werte

$$0 < x < 1 \qquad (*)$$

annehmen kann, und es folgt

$$\overline{DE} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - x^2} = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 - x^4} .$$

Ist SF das Lot von S auf AD, so hat DSA den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\,\overline{AD}\cdot\overline{SF} = \overline{SE}\cdot\overline{DE}$ ; damit folgt $\overline{SF} = 2x \cdot \sqrt{1 - x^4}$ .

Wegen AD,SD $\perp$ BC ist BC senkrecht zur Ebene durch A,D,S. In dieser Ebene liegt SF und ist folglich nicht nur zu AD, sondern auch zur Richtung von BC senkrecht, also das Lot von S auf die Fläche ABC. Daher und wegen (1) hat die Pyramide das Volumen

$$V = \frac{2}{3}\, x \cdot \sqrt{1 - x^4} .$$

Es sei f die im Intervall (*) durch $f(x) = x^2 - x^6$ definierte Funktion; für alle x, zu denen eine Pyramide ABCS mit (1),(2),(3) existiert, ist $f(x) = \frac{9}{4} V^2$. Für f gilt $f'(x) = 2x\cdot(1 - 3x^4)$; an der Stelle $\xi = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ist $f'(\xi) = 0$, für alle x mit $0 < x < \xi$ ist $f'(x) > 0$, für alle x mit $\xi < x < 1$ ist $f'(x) < 0$. Also ist f im Intervall $0 < x \leq \xi$ streng monoton steigend und im Intervall $\xi \leq x < 1$ streng monoton fallend; $f(\xi)$ ist der größte Wert von f im Intervall (*). Für $\alpha = \overline{\sphericalangle\, BAC}$ erhält man nun mit $x = \xi$ den Wert $\tan\frac{\alpha}{2} = \overline{BD}:\overline{AD} = \xi^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $\alpha = 60^\circ$. Zusammen mit (2),(3) ergibt dies: Die vier Dreiecke ABC, SBC, BSA, CSA sind gleichseitig. Eine solche Pyramide (nämlich ein reguläres Tetraeder) existiert.

Es gibt also unter den Pyramiden mit (1),(2),(3) eine mit größtem Volumen; die gesuchte Winkelgröße ist $60^\circ$.

# 31. Mathematik-Olympiade
## Vorschläge zur Punktverteilung
## Olympiadeklassen 11-13
## 2.Tag

311234

| | |
|---|---|
| Nachweis der im Fall a=1 gefragten Ungleichung $s_n>1$ für alle n, z.B. durch Nachweis und Nutzung der Monotonie ............... | 3 |
| Nachweis von $s_n<2$ für alle n, also der im Fall $a\geq 2$ gefragten Ungleichung für kein n ....... | 3 |
| | 6 |

311235

| | |
|---|---|
| Definition einer Auswahl von Zahlen ........................... | 1 |
| Nachweis, daß ihre Anzahl 50 beträgt .......................... | 1 |
| Nachweis, daß ihre Summe 2525 beträgt<br>Nachweis, daß keine zwei von ihnen die Summe 101 haben<br>Der weniger aufwendige dieser beiden Nachweise ............ | 2 |
| Der aufwenigere " " " .............. | 3 |
| Wird eine Hinführung zur Definition vorangestellt, so können darin Teile der aufgezählten Nachweise mit erbracht sein; dann sind entsprechende Punktanteile hierfür zu vergeben. | |
| | 7 |

311236

| | |
|---|---|
| Vorbereitende Lage- und Längenaussagen z.B. über AD, SD, BE, CE, DE ................................ | 2 |
| Ermittlung von (SF und) V als Funktion (z.B.) von x .......... | 2 |
| Nachweis für Existenz und Einzigkeit (ggf. der Maximalstelle $\xi$ von f, aber jedenfalls) der Pyramide mit maximalem Volumen ........................ | 2 |
| [Bei Ermittlung ohne Differentialrechnung sind die bisher genannten 6 Punkte sinngemäß anders aufzuteilen] | |
| Ermittlung des gesuchten Winkels ................................ | 2 |
| | 8 |