311221

Ist c eine reelle Zahl, so werde das Gleichungssystem

$$x + y = 1 , \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = c \qquad (2)$$

gebildet.

a) Man ermittle für c = 2 alle Paare (x;y), die das Gleichungssystem (1),(2) erfüllen.

Man ermittle ferner jeweils alle diejenigen reellen Zahlen c , für die das Gleichungssystem (1),(2)

b) keine Lösung (x;y) aus reellen Zahlen x, y hat,

c) genau eine Lösung (x;y) hat,

d) zwei verschiedene Lösungen $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ aus reellen Zahlen hat.

311222

Man untersuche, ob es ein gleichseitiges Dreieck ABC gibt, dessen drei (nicht miteinander zusammenfallende) Eckpunkte in einem kartesischen Koordinatensystem sämtlich ganzzahlige Koordinaten haben.

311223

Man ermittle alle diejenigen Tripel (a;b;c) natürlicher Zahlen, mit denen durch

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + b}$$

eine Funktion f definiert wird, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen x definiert.

(2) Es gilt $1 < f(2) < f(1) < 2$.

(3) Die Funktion f besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen.

311224

Man beweise, daß für alle reellen Zahlen x die Ungleichung

$$x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 \geq 0 .$$

gilt.

Kinlampf 2.L 18

311221 Lösung: 9 Punkte

I. Wenn für eine reelle Zahl c das Gleichungssystem (1),(2) ein Paar (x;y) reeller Zahlen als Lösung hat, so folgt:

Nach (1) ist $y = 1 - x$; (3)

setzt man dies in (2) ein, so folgt $x^2 + 1 - 2x + x^2 = c$,

$$x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{c}{2} = 0 . \qquad (4)$$

Demnach ist x eine der Zahlen

$$x_{1;2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{c}{2}} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2c - 1}) , \qquad (5)$$

und die hier auftretende Diskriminante ist nicht negativ, d.h. es gilt $2c - 1 \geqq 0$,

$$c \geqq \frac{1}{2} ;$$

wobei im Fall $c > \frac{1}{2}$ genau zwei Lösungen $x_1 \neq x_2$ vorliegen, im Fall $c = \frac{1}{2}$ genau eine Lösung $x_1 = x_2$.

Nach (3) folgt: y ist die jeweils zu x_1 bzw. x_2 entsprechende der Zahlen

$$y_{1;2} = 1 - x_{1;2} = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{2c - 1}) . \qquad (6)$$

II. Wenn $c \geqq \frac{1}{2}$ gilt und (x;y) eines der nach (5),(6) zu bildenden Paare $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ ist, so folgt[1]: Da für x und y die erste Gleichung in (6) gilt, wird (3), also (1) erfüllt. Nach (5) ist ferner x eine Lösung von (4); hieraus, d.h., aus $x^2 + (1 - x)^2 = c$, folgt wegen (3) auch (2).

Mit I. und II. ist gezeigt:

a) Für c = 2 hat das Gleichungssystem (1),(2) genau die Paare $\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) ; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) \right)$, $\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) ; \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \right)$ als Lösung.

b),c),d) Das Gleichungssystem (1),(2) hat keine bzw. genau eine Lösung bzw. genau zwei Lösungen aus reellen Zahlen jeweils für alle reellen c mit $c < \frac{1}{2}$ bzw. für $c = \frac{1}{2}$ bzw. für alle reellen c mit $c > \frac{1}{2}$.

Bemerkungen: 1. Zu a) genügt es natürlich auch, das Gleichungssystem $x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 2$ zu lösen, ohne andere Werte von c zu betrachten.

---

1) Man kann auch (1),(2) durch Einsetzen von (5),(6) und rechnerische Ausführung bestätigen:

$$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2c-1}) + \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{2c-1}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2c-1} + 1 \mp \sqrt{2c-1}) = 1,$$

$$\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{2c-1})^2 + \frac{1}{4}(1 \mp \sqrt{2c-1})^2 = \frac{1}{4}(1 \pm 2\sqrt{2c-1} + 2c-1 + 1 \mp 2\sqrt{2c-1} + 2c-1) = c.$$

2. Entsprechend wie in einer Bemerkung zu 311214 kann man wegen $xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ das Gleichungssystem (1),(2) durch das äquivalente System $x + 1 = 1$, $xy = \frac{1}{2} - \frac{c}{2}$ ersetzen und damit nach dem Viëtaschen Wurzelsatz das Paar $(x;y)$ als das in beliebiger Reihenfolge angegebene Paar der Lösungen $t_{1;2}$ der Gleichung $t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{c}{2} = 0$ charakterisieren.
Rein rechnerisch betrachtet gibt also bereits die rechte Seite von (5) an, welche Zahlen in jedem Lösungspaar $(x;y)$ vorkommen müssen; jedoch ist erst dem Text der Lösungsdarstellung zu entnehmen, ob dies auch korrekt hergeleitet wurde.

311222 Lösung: 9 Punkte

Angenommen, es gäbe ein solches Dreieck ABC. Die Bezeichnungen könnten dann o.B.d.A. so gewählt werden, daß das Dreieck im mathematisch positiven Sinne orientiert ist. Ferner könnte o.B.d.A. angenommen werden, daß der Eckpunkt A im Koordinatenursprung liegt. Die Koordinaten von B seien (p,q), die von C seien (s,t). Somit hätte der Mittelpunkt D der Strecke AB die Koordinaten $(\frac{p}{2} ; \frac{q}{2})$. Es sei ferner E der Bildpunkt von B bei der Drehung um den Koordinatenursprung mit dem Drehwinkel 90° im positiven Drehsinn. Dann hätte E die Koordinaten $(-q ; p)$, der von D nach C führende Vektor wäre gleichsinnig parallel zu dem von A nach E führenden Vektor, und ihr Längenverhältnis wäre das Verhältnis einer Höhenlänge zur Seitenlänge im gleichseitigen Dreieck, also $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Damit folgte

$$s = \frac{p}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{3} \tag{1}$$

und

$$t = \frac{q}{2} + \frac{p}{2}\sqrt{3}, \tag{2}$$

also

$$pt - qs = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)\cdot\sqrt{3}. \tag{3}$$

Wegen $A \neq B$, also $p^2 + q^2 \neq 0$, folgte der Widerspruch, daß die rationale Zahl $\frac{2(pt - qs)}{p^2 + q^2}$ gleich $\sqrt{3}$ wäre. Also war die eingangs gemachte Annahme falsch; d.h., es gibt kein Dreieck wie im Aufgabentext beschrieben.

Andere Lösungsvarianten bestehen darin, (1),(2) z.B. daraus zu erhalten, daß C aus B durch Drehung um A mit dem Drehwinkel 60° hervorgehen, also $s = p\cdot\cos 60^\circ - q\cdot\sin 60^\circ$, $t = p\cdot\sin 60^\circ + q\cdot\cos 60^\circ$ gelten müßte. Oder man begründet sogleich (3), indem man für den Flächeninhalt von ABC einerseits die Formel $\frac{1}{2}(pt - qs)$, andererseits mit $a = \sqrt{p^2 + q^2}$ die Formel $\frac{1}{4}a^2\cdot\sqrt{3}$ zitiert.

311223 Lösung: 11 Punkte

I. Wenn die Bedingungen durch natürliche Zahlen a,b,c erfüllt werden, so folgt:

Wegen (2) und $b \geq 0$, $c \geq 0$ ist $1 < \frac{4+2a+b}{4+2c+b}$, also $4+2c+b<4+2a+b$,

$$c < a\,, \tag{4}$$

ferner $\frac{4+2a+b}{4+2c+b} < \frac{1+a+b}{1+c+b}$, also $(4+2a+b)(1+c+b) < (4+2c+b)(1+a+b)$,

$$0 < 2a-2c-ab+bc = (a-c)(2-b) \tag{5}$$

sowie $\frac{1+a+b}{1+c+b} < 2$, also $1+a+b < 2+2c+2b$,

$$a < 1+b+2c\,. \tag{6}$$

Aus (4) und (5) folgt $b < 2$, also, da b eine natürliche Zahl ist, $b = 0$ oder $b = 1$. Wäre $b = 0$, so wäre f für $x = -c$ nicht definiert, was (1) widerspricht. Also ist

$$b = 1\,. \tag{7}$$

Nach (1), somit auf $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + cx + 1}$ angewandt, folgt: Die Diskriminante von $x^2 + cx + 1$ ist negativ; d.h., es gilt $c^2 - 4 < 0$ und daher

$$c < 2\,. \tag{8}$$

Aus (3) und (7) folgt, daß $x^2 + ax + 1$ zwei verschiedene reelle Nullstellen, also eine positive Diskriminante besitzt; d.h., es gilt $a^2 - 4 > 0$, wegen $a \geq 0$ also

$$a > 2\,. \tag{9}$$

Hieraus und (6),(7) folgt $2 < 1+1+2c$, also $c > 0$. Daher und wegen (8) verbleibt für c nur

$$c = 1 \tag{10}$$

und wegen (6),(7),(10), d.h. $a < 4$, und (9) für a nur

$$a = 3\,.$$

Also kann nur das Tripel $(a;b;c) = (3;1;1)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Durch $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1}$ wird in der Tat wegen der negativen Diskriminante von $x^2 + x + 1$ und der positiven Diskriminante von $x^2 + 3x + 1$ eine für alle reellen x definierte Funktion f gegeben, die zwei reelle Nullstellen hat. Wegen $f(1) = \frac{5}{3}$, $f(2) = \frac{11}{7}$ erfüllt f auch die Bedingung $1 < f(2) < f(1) < 2$.

311224 Lösung: 11 Punkte

Für alle reellen Zahlen x gilt $x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1$

$$= (x-1)\cdot(x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 2x - 1)$$
$$= (x-1)^2\cdot(x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 1)$$
$$= (x-1)^2\cdot\left((x^2 + \tfrac{3}{2}x)^2 + \tfrac{27}{4}x^2 + 3x + 1 \right)$$
$$= (x-1)^2\cdot\left((x^2 + \tfrac{3}{2}x)^2 + 3\cdot(\tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{2}{3} \right).$$

Wegen $(x-1)^2 \geqq 0$, $(x^2 + \frac{3}{2}x)^2 \geqq 0$, $(\frac{3}{2}x + \frac{1}{3})^2 \geqq 0$ für alle reellen x folgt damit die zu beweisende Ungleichung.

Andere Lösungswege ergeben sich nach Abspalten von $(x-1)^2$ z.B. mit Hilfe der Differentialrechnung: Für die durch

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 1$$ definierte Funktion f ist

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 18x + 3,$$
$$f''(x) = 12x^2 + 18x + 18 = 12\cdot(x + \tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{45}{4} > 0$$

für alle reellen x. Also ist f' für alle reellen x streng monoton steigend. Hieraus, aus der Stetigkeit von f' und aus $f'(-0{,}2) = -0{,}272$; $f'(-0{,}1) = 1{,}286$ folgt: f' hat genau eine Nullstelle ξ; für sie gilt[1] $-0{,}2 < \xi < -0{,}1$.

Wegen des streng monotonen Steigens von f' folgt weiter: Für alle $x \leq -0{,}2$ ist $f'(x) < 0$, also f streng monoton fallend; für alle $x \geq -0{,}1$ ist $f'(x) > 0$, also f streng monoton steigend. Hieraus und aus $f(-0{,}2) = 0{,}7376$; $f(-0{,}1) = 0{,}7871$ folgt:

(1) Für alle $x \leq -0{,}2$ ist $f(x) \geq 0{,}7376$.

(2) Für alle $x \geq -0{,}1$ ist $f(x) \geq 0{,}7871$. Ferner ergibt sich:

(3) Für alle x mit $-0{,}2 < x < -0{,}1$ gilt

$$x^4 > (-0{,}1)^4 = 0{,}0001\ ;\quad 3x^3 > 3\cdot(-0{,}2)^3 = -0{,}024\ ;$$
$$9x^2 > 9\cdot(-0{,}1)^2 = 0{,}09\ ;\quad 3x > 3\cdot(-0{,}2) = -0{,}6\ ,$$

also $f(x) > 0{,}0001 - 0{,}024 + 0{,}09 - 0{,}6 + 1 = 0{,}4661$.

Mit (1),(2),(3) ist $f(x) > 0$ für alle reellen x bewiesen.

Hinweis: Rechnet man mit genaueren Näherungswerten, stellt also z.B. fest, daß der (etwa durch Probieren mit einem Taschenrechner gefundene) Wert $\xi \approx -0{,}18187$ auf vier bzw. drei Dezimalen genau $f'(\xi) \approx 0{,}0000$ und $f(\xi) \approx 0{,}735$ liefert, so ist damit ein Lösungsweg zwar nahegelegt, aber so noch *nicht korrekt* geführt. Das gilt selbst dann, wenn z.B. ähnlich wie oben hinzugefügt wird, daß f' genau diese eine Nullstelle ξ haben muß und daß f im Intervall $x \leq \xi$ streng monoton fällt und im Intervall $x \geq \xi$ streng monoton steigt, daß demnach $f(x) \geq f(\xi)$ für alle x gelten muß. Denn da bei einer solchen Darstellung statt ξ *nur ein Näherungswert* $-0{,}18187$ herangezogen wird, kann *ohne Fehlerabschätzung für* $f(\xi)$ nicht korrekt von $f(-0{,}18187) > 0$ auf $f(\xi) > 0$ geschlossen werden.

---

1) Diese „grobe" Abschätzung von ξ reicht für die oben folgende Beweisführung aus; man kann sogar z.B. das (rechnerisch noch einfachere) Intervall $-0{,}2 < \xi < 0$ wählen. Wie im obigen Hinweis auch erläutert wird, bringt eine „bessere" Kenntnis von ξ keine Verminderung der logischen Anforderungen an einen korrekten Beweis.

311221

a) Lösung des Systems (1), $x^2+y^2 = 2$	2
(Falls sogleich allgemein (1),(2) behandelt wird, verteilen sich diese 2 Punkte z.B. auf den ersten und dritten der folgenden Punktanteile:)	
b),c),d) Korrekte Ausführungen zum Lösen des Systems (1),(2):	
Übergang zu einer quadratischen Gleichung	2
Diskussion der Existenz und Eindeutigkeit (sowie Angabe) der Lösung(en)	3
Abschließ.Ermittlg.d.Ergebnisse $c \lesseqgtr 1/2$ zu b)/c)/d)	2
	9

311222

Gewinnung von (für einen weiteren Beweis verwendbaren) Beziehungen zwischen den Koordinaten	3
Weitere, einen Irrationalitätsnachweis vorbereitende Beweisschritte	4
Abschließende Herleitung eines Widerspruchs	2
	9

311223

Nutzung von (1),(2),(3): Je 2 Punkte	6
Weitere Schlüsse bis zur Eindeutigkeitsaussage	3
Bestätigung: (a;b;c) = (3;1;1) erfüllt (1),(2),(3)	2
	11

311224

Vorbereitende Beweisschritte

[etwa: Abspaltung von $(x-1)^2$ 3
zweimalige quadratische Ergänzung: ...... 3 + 3]

[oder: Vorbereitungen zum Anwenden der Differentialrechnung 4
Schlüsse von f'' auf f', von f' auf f ... 2 + 3] ... 9

Jeweils abschließende Abschätzung 2

11