31. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1.Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

311041

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen k, für die die folgende Aussage (1) wahr ist:

(1) Für jedes Paar (a;b) reeller Zahlen a,b gilt $a^2 + b^2 \geq k \cdot ab$.

311042

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; auf der Seite BC sei D ein beliebiger Punkt zwischen B und C; auf CA sei E ein beliebiger Punkt zwischen C und A; auf AB sei F ein beliebiger Punkt zwischen A und B.

Ferner sei k_A der Kreis durch A,E,F; es sei k_B der Kreis durch B,F,D; und es sei k_C der Kreis durch C,D,E.

Man beweise, daß bei allen Lagemöglichkeiten, die es unter diesen Voraussetzungen für A,B,C,D,E,F,k_A,k_B,k_C gibt, die drei Kreise k_A , k_B , k_C stets einen Punkt gemeinsam haben.

Von den nachstehenden Aufgaben 311043A *und* 311043B *ist genau eine auszuwählen und zu lösen:*

311043 A

Es sei f eine Funktion, die für alle positiven ganzen Zahlen n und nur für diese definiert sei und deren sämtliche Funktionswerte f(n) ganzzahlig sind. Ferner werde vorausgesetzt, daß für alle positiven ganzen Zahlen m, n die Gleichung

$$f\big(f(m) + f(n)\big) = m + n$$

gilt.

Man ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Funktionswert f(1992) bei einer solchen Funktion f vorkommen können.

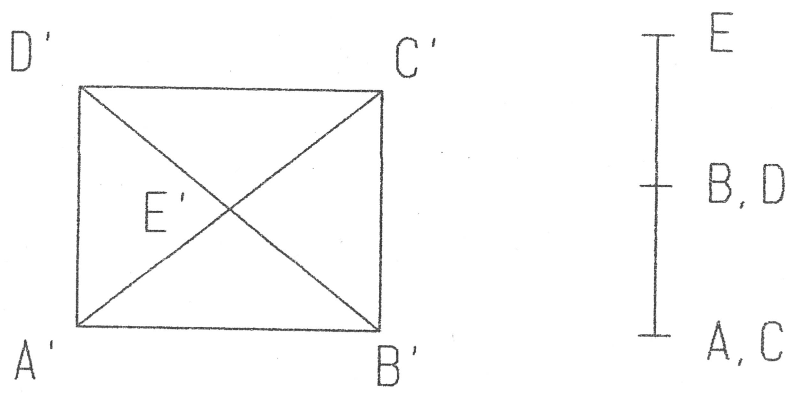
<u>311043 B</u>

In Abb.A 311043 B ist die senkrechte Eintafelprojektion eines ebenflächig begrenzten Körpers mit zugehörigem Höhenmaßstab dargestellt. A'B'C'D' ist ein Rechteck, E' sein Diagonalenschnittpunkt; für die im Höhenmaßstab gezeigten Höhen (über A und C) gilt: Die Höhe von E ist das Zweifache der Höhe von B und D. Vorausgesetzt wird ferner, daß der Körper genau die Punkte A,B,C,D,E als Ecken hat.

a) Untersuchen Sie, ob es (bis auf Verschiebung senkrecht zur Zeichenebene) genau einen Körper gibt, auf den diese Angaben zutreffen!

b) Zeichnen Sie für jeden derartigen Körper eine Darstellung in Dreitafelprojektion, bei der der Grundriß aus Abb.A 311043 B übernommen ist! Im Auf- und Seitenriß sind alle Kanten des betreffenden Körpers zu zeichnen. [Dabei ist in üblicher Weise zu unterscheiden zwischen sichtbaren Linien (durchgezogen) und verdeckten Linien (gestrichelt, sofern nicht genau hinter sichtbaren *Linien* verdeckt); Abb.A 311043 B selbst ist in dieser Weise aufzufassen.]

Abb.A 311043 B:



31. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

2.Tag

311044

Für jede natürliche Zahl n sei $\overline{n}$ diejenige Zahl, die im Ziffernsystem mit der Basis 10 durch dieselbe Ziffernfolge dargestellt wird wie n im Ziffernsystem mit der Basis 9.
Man zeige, daß es eine natürliche Zahl k gibt, so daß für jedes Paar $(m;n)$ natürlicher Zahlen mit $m > 100$ und $n-m > k$ die Ungleichung

$$n - m < \overline{n} - \overline{m}$$

gilt. Man ermittle auch die kleinste derartige natürliche Zahl k.

311045

Kann jedes Dreieck in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden?

311046

Es sei q die größere der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$. Man ermittle die letzte Ziffer in der dekadischen Zifferndarstellung der Zahl $[q^{1992}]$.

Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq z < g+1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

31. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe

Lösungen

Olympiadeklasse 10

1.Tag

311041 Lösung: 5 Punkte

I. Für jedes reelle k mit

$$|k| \leq 2 \tag{2}$$

und jedes Paar (a;b) reeller Zahlen a, b gilt: Wegen (2) und $|ab| \geq 0$ ist $|k| \cdot |ab| \leq 2|ab|$, also

$$a^2 + b^2 - k \cdot ab \geq a^2 + b^2 - |k| \cdot |ab| \geq a^2 + b^2 - 2|ab| = (|a| - |b|)^2 \geq 0 .$$

II. Zu jedem reellen k mit $|k| > 2$ gibt es ein Paar (a;b) reeller Zahlen mit $a^2 + b^2 < k \cdot ab$; zum Beispiel gilt dies wegen $4 < k^2$, also $2^2 + k^2 < k \cdot 2k$, für das Paar (a;b) = (2;k) .

Mit I. und II. ist gezeigt: Die Aussage (1) ist genau für alle diejenigen reellen k wahr, für die $|k| \leq 2$ (d.h. $-2 \leq k \leq 2$) gilt.

311042 Lösung: 7 Punkte

Mit α, β, γ seien wie üblich die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A, B bzw. C bezeichnet.
Da k_A und k_B den Punkt F gemeinsam haben, schneiden sie sich entweder in F und einem Punkt $P \neq F$; oder sie berühren sich in F , in diesem Fall sei P = F gesetzt. Nun liegt stets einer der folgenden Fälle vor:

1.Fall: P liegt im Innern des Dreiecks ABC (Abb.L 311042 a).

Dann ist AFPE ein Sehnenviereck mit $\overline{\angle FPE} = 180° - \alpha$ und BFPD ein Sehnenviereck mit $\overline{\angle FPD} = 180° - \beta$. Daraus folgt

$$\overline{\angle DPE} = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma .$$

Also ist CEPD ein Sehnenviereck; d.h., k_C geht ebenfalls durch P.

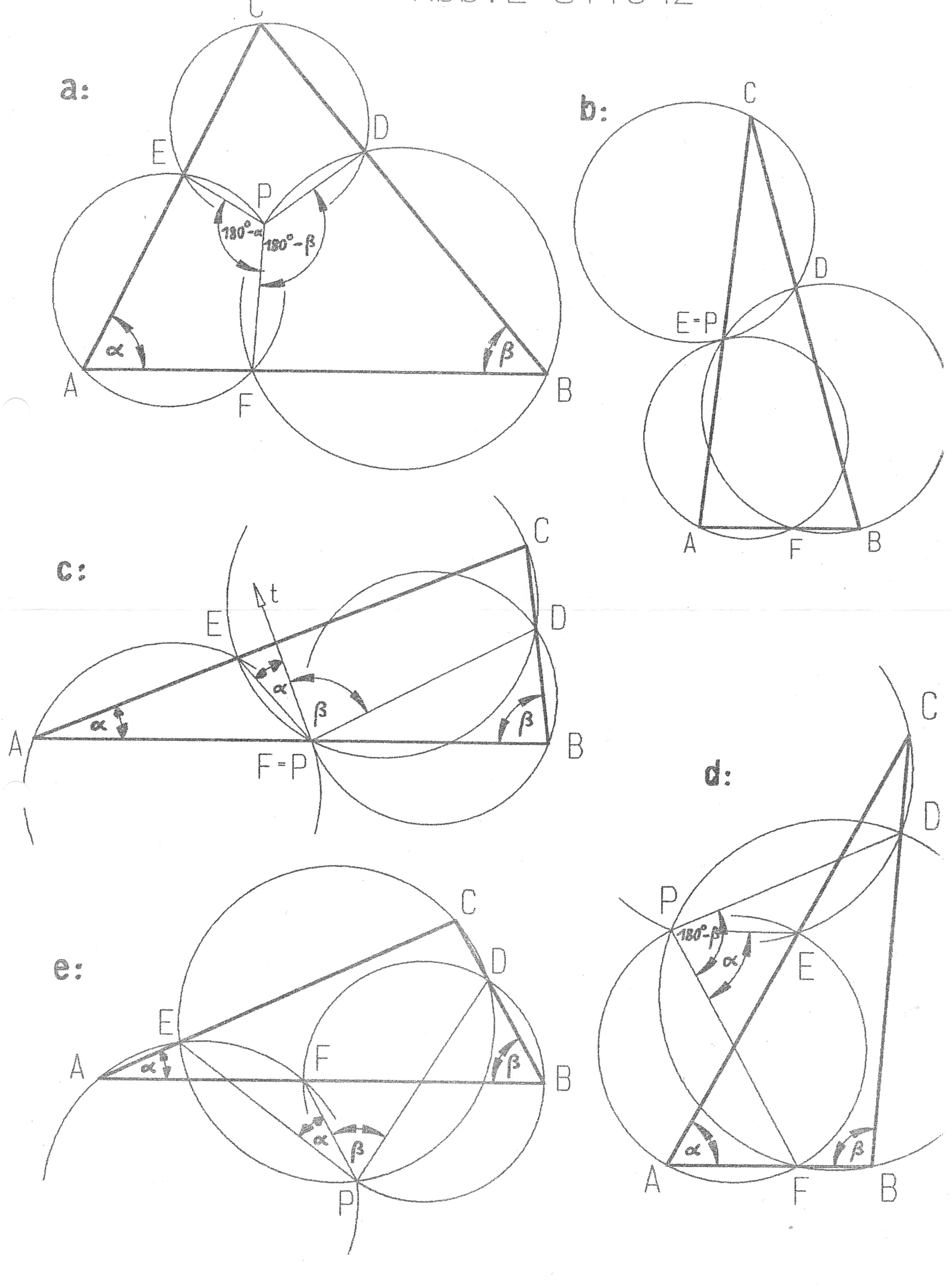
2.Fall: P liegt auf einer der Geraden durch A,C bzw. durch B,C, o.B.d.A. auf der Geraden durch A,C (Abb.L 311042 b).

Da k_B nicht durch A geht, ist $P \neq A$, also ist P der von A verschiedene Schnittpunkt des Kreises k_A mit der Geraden durch A,C; d.h., es gilt P = E . Daher geht auch k_C durch P.

3.Fall: P liegt auf der Geraden durch A,B (Abb.L 311042 c).

Da k_B nicht durch A geht, ist $P \neq A$, also ist P der von A verschiedene Schnittpunkt des Kreises k_A mit der Geraden durch A,B; d.h., es gilt P = F . Da P zwischen A und B liegt, berühren sich k_A und k_B von außen. Auf der gemeinsamen Tangente an k_A , k_B in P sei t derjenige von P ausgehende Strahl, dessen Punkte auf derselben Seite der Geraden durch A,B liegen wie C. Nach dem Sehnen-Tangentensatz bildet t mit PE einen Winkel der Größe α und mit PD einen Winkel der Größe β. Daraus folgt $\overline{\angle DPE} = \alpha + \beta = 180° - \gamma$. Also ist CEPD ein Sehnenviereck; d.h., k_C geht durch P.

Abb.L 311042


a:
C
D
E
P
180°-α
180°-β
α
β
A
F
B
b:
C
D
E=P
A
F
B
c:
C
t
E
D
α
β
A
F=P
B
d:
C
D
P
180°-β
α
E
α
β
A
F
B
e:
C
D
E
F
A
α
β
B
P

<u>4.Fall:</u> P liegt außerhalb des Dreiecks, und zwar auf derselben Seite der Geraden durch A,B wie C.

Läge dabei P so, daß C der Dreiecksfläche ABP angehört, so gehörte C einer der beiden Dreiecksflächen AFP, FBP an, o.B.d.A. der Fläche AFP. Dann hätte aber k_A einen von A verschiedenen Schnittpunkt mit der Verlängerung von AC über C hinaus, im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß k_A durch den zwischen A und C gelegenen Punkt E geht. Also liegt P entweder auf derselben Seite der Geraden durch A,C wie B oder auf derselben Seite der Geraden durch B,C wie A; o.B.d.A. gelte das Letztgenannte (Abb. L 311042 d).

Dann ist nach dem Peripheriewinkelsatz $\overline{\measuredangle\, FPE} = \alpha$, und BFPD ist ein Sehnenviereck mit $\overline{\measuredangle\, FPD} = 180^\circ - \beta$. Daraus folgt $\overline{\measuredangle\, DPE} = 180^\circ - \beta - \alpha = \gamma$. Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes geht somit k_C durch P.

<u>5.Fall:</u> P liegt auf der anderen Seite der Geraden durch A,B als C. Wieder scheiden die Fälle aus, daß A der Dreiecksfläche BCP oder B der Dreiecksfläche ACP angehört; es verbleibt Abb.L 311042 e.

In diesem Fall ist nach dem Peripheriewinkelsatz $\overline{\measuredangle\, FPE} = \alpha$, $\overline{\measuredangle\, FPD} = \beta$. Daraus folgt $\overline{\measuredangle\, DPE} = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Also ist CEPD ein Sehnenviereck; d.h., k_C geht ebenfalls durch P.

Damit ist die Behauptung für jede Lagemöglichkeit bewiesen.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Statt einer verbalen Beschreibung der Lagemöglichkeiten kann auch eine in stärkerem Maße durch Berufung auf zeichnerisches Darstellen von Lagefällen vorgehende Diskussion akzeptiert werden. Jedoch ist jedenfalls zur Bewertung zu berücksichtigen, ob alle Lagemöglichkeiten erfaßt wurden. Bei anderem Beweisansatz und -aufbau können hierzu auch andere Charakterisierungen und andere Anzahlen von Fällen auftreten.

<u>311043 A Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Wenn eine Funktion f die genannten Bedingungen, insbesondere die Gleichung

$$f\big(f(m) + f(n)\big) = m+n \,, \tag{1}$$

erfüllt, so folgt: Für alle positiven ganzen Zahlen n muß die ganze Zahl f(n) positiv sein, da vorausgesetzt wird, daß der Funktionswert $f\big(f(n)+f(n)\big)$ existiert (und gleich n+n ist).
Daher folgt durch wiederholte Anwendung von (1): Für jede positive ganze Zahl k gilt

$$\begin{aligned} 1+f(k+1)+f(1) &= f\big(f(1) + f(f(k+1)+f(1))\big) = f\big(f(1) + k+1+1\big) \\ &= f\big(f(1) + f(f(k)+f(2))\big) = 1+f(k)+f(2) \,. \end{aligned} \tag{2}$$

⇒ f(k+1)-f(k) = f(2)-f(1)

⇒ arith. Folge

Hiermit ergibt sich durch vollständige Induktion: Mit den Abkürzungen $a = f(2)-f(1)$ und $b = 2\cdot f(1)-f(2)$ gilt

$$f(n) = a\cdot n + b \quad (n = 1,2,\ldots) \,; \tag{3}$$

denn für n=1 besagt dies $f(1) = f(1)$, und wenn (3) für ein $n = k \geq 1$ gilt, so folgt aus (2) auch

$$f(k+1) = f(k) + f(2)-f(1) = a\cdot k+b + a = a\cdot(k+1) + b \,.$$

$= ak+b + 2a+b - a - b$

Mit (3) geht nun (1) über in $a\cdot(am+b + an+b) + b = m + n$. Für m=1, n=1 bzw. für m=1, n=2 ergibt dies

$$2a^2 + 2ab + b = 2 \qquad (4)$$

bzw.

$$3a^2 + 2ab + b = 3 \ . \qquad (5)$$

Durch Subtraktion folgt $a^2 = 1$ (*), dann $(2a+1)b = 0$. Weiter folgt $a \neq -\frac{1}{2}$, also $2a+1 \neq 0$, $b = 0$, womit (3) auf $a = f(1) > 0$, also (*) $a = 1$ führt.

Demnach ist f die für alle positiven ganzen n und nur für diese durch $f(n) = n$ definierte Funktion.

II. Diese Funktion erfüllt ersichtlich die Bedingungen der Aufgabe.

Nach I.,II. kommt (für f mit den genannten Bedingungen) genau die Zahl 1992 als Funktionswert f(1992) vor.

311043 B Lösung: 7 Punkte

Abb.L 311043 B a zeigt in schräger Parallelprojektion die Punkte A,B,C,D,E zusammen mit einem umhüllenden Quader. Von den 10 möglichen Verbindungsstrecken müssen mindestens AB, BC, CD, DA und AE, BE, CE, DE als Kanten eines Körpers vorkommen, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. An jeder Kante müssen genau zwei ebene Teilflächen der Oberfläche des Körpers zusammenstoßen. Da keine weiteren Punkte außer A,B,C,D,E als Eckpunkte vorkommen, müssen mindestens die Dreiecke ABE, BDE, CDE DAE zur Oberfläche des Körpers gehören, und an die Strecken AB,BC,CD,DA muß sich jeweils ein von diesen Dreiecken verschiedenes ebenes Teilstück der Oberfläche anschließen. Hierfür gibt es genau zwei Möglichkeiten: Entweder gehören noch die beiden Dreiecke ABC und ADC zur Oberfläche oder die beiden Dreiecke ABD und CBD.

Also treffen die Angaben (bis auf Höhenänderung über der Zeichenebene) auf genau zwei Körper zu, bestehend entweder aus den drei in Abb.L 311043 B b dargestellten Tetraedern oder nur aus den beiden stärker hervorgehobenen. Mit Hilfe des in Abb.L 311043 B a zusätzlich gezeichneten Quaders lassen sich die geforderten Dreitafelprojektionen Abb.L 311043 B c,d leicht gewinnen; insbesondere ist daran ablesbar, welche Linien im Aufriß von vorn gesehen bzw. im Seitenriß von links gesehen sichtbar oder verdeckt sind.

Bemerkung: Zeichnungen wie Abb.L 311043 B a,b können zwar, etwa wie hier, teilweise statt verbaler Beschreibung zur Lösungsangabe herangezogen werden, sind aber sonst nicht gefordert. Ebenfalls nicht gefordert wird eine schrittweise Konstruktionsbeschreibung zur Gewinnung der Dreitafelprojektionen.

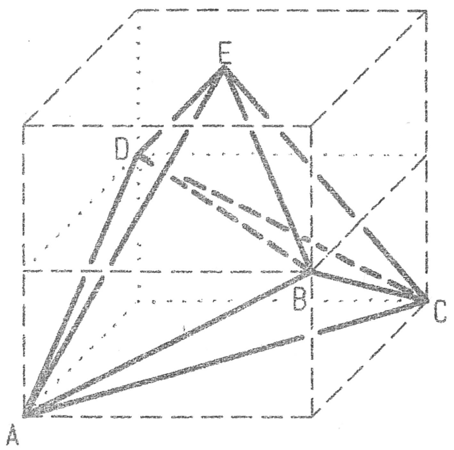


Abb.L 311043 B a

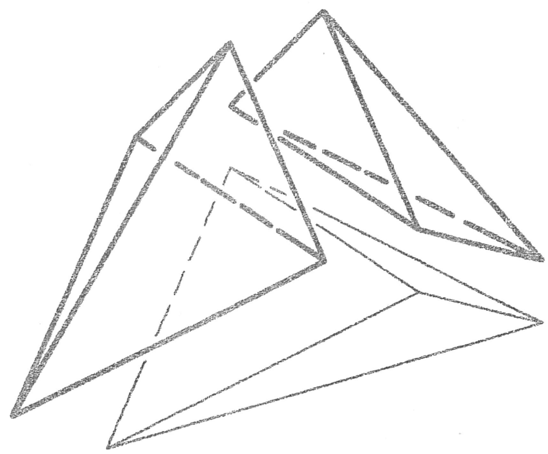
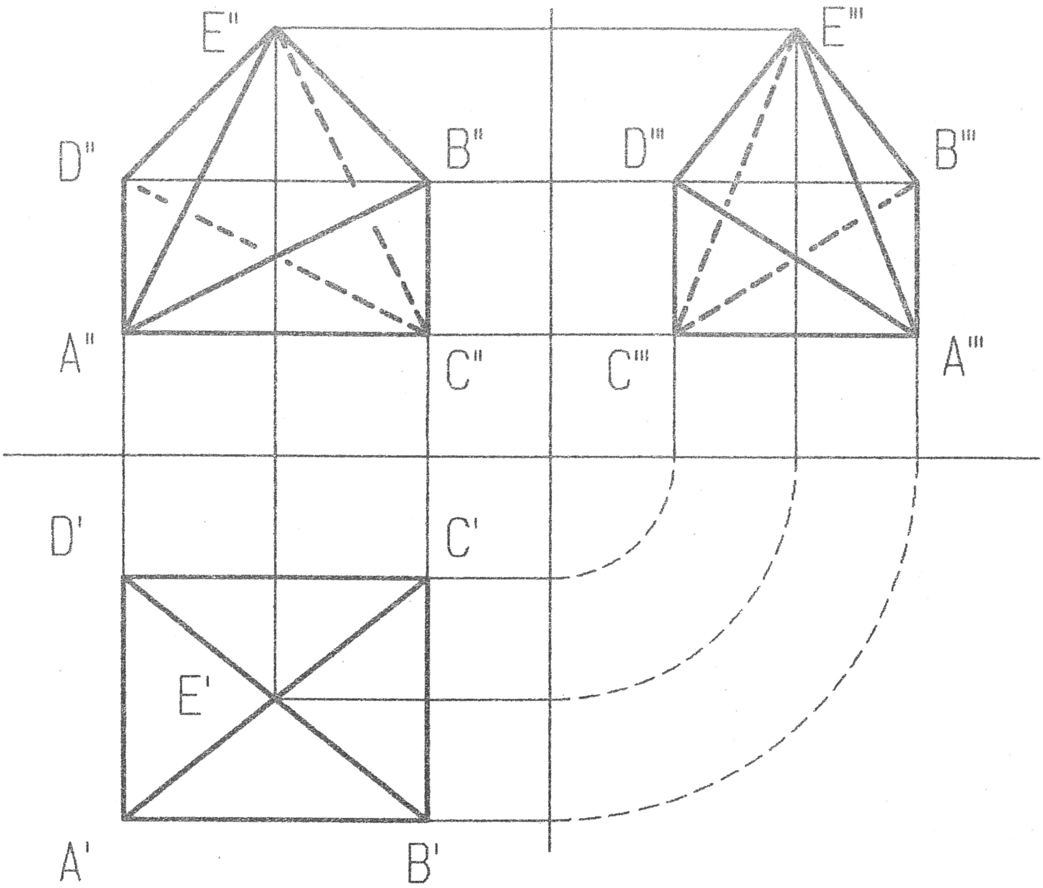


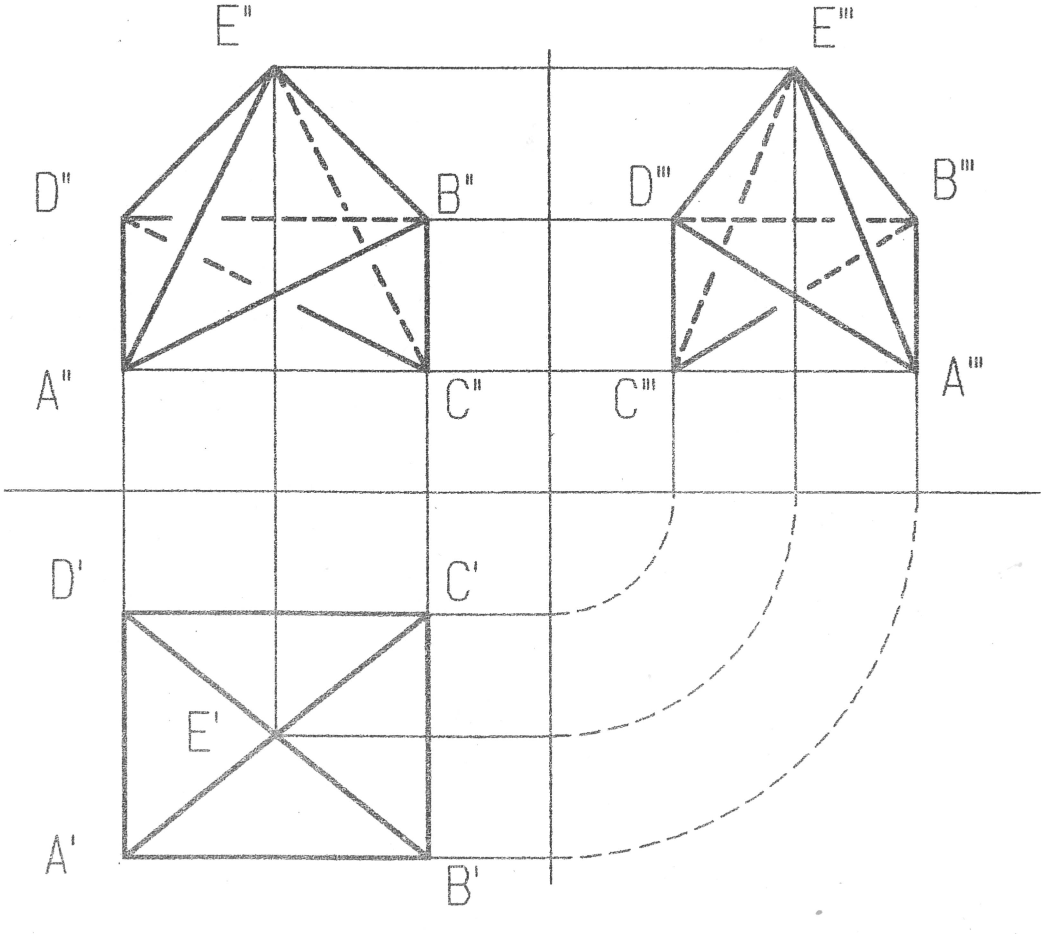
Abb.L 311043 B b

Abb.
L 311043 B

c:



d:



Vorschläge zur Punktverteilung

<u>311041</u>

Beweis, daß für jedes $|k|\leq 2$ der Schluß auf (1) gilt 3

Beweis, daß für jedes $|k|>2$ der Schluß auf (1) nicht gilt 2

5

<u>311042</u>

Ersichtlich begründete Vollständigkeit der Fallunterscheidung 1

Die restlichen 6 Punkte werden je nach erforderlichem Aufwand auf die - bei dem gewählten Ansatz - *zu bearbeitenden* Fälle oder Fall-Gruppen aufgeteilt. Die *bearbeiteten* erhalten dann entsprechende Punktanteile.
Beim angegebenen Lösungsweg z.B.: a) ...... 2; b),c) ... 2; d),e) ... 2 6

7

<u>311043 A</u>

Für jede Funktion f , die den Bedingungen der Aufgabe genügt: Ermittlung (Einzigkeitsnachweis) von Funktionswerten, unter denen sich (mindestens) f(1992) befindet, z.B aufgeteilt in

Anfangsschritte (oder sonstige zur Herleitung beitragende Einzelschritte) 2

Induktionsschritt (oder sonstige zur Herleitung beitragende allgemeine Beweisschritte) 4

Nachweis: Wenn f wie ermittelt beschaffen ist (und insbesondere f(1992)=1992 erbringt), dann genügt f den Bedingungen der Aufgabe 1

(Diese hier getrennt beschriebenen logisch erforderlichen Teil-Nachweise müssen nicht derart getrennt aufgeführt sein.)

7

<u>311043 B</u>

Ermittlung und Beschreibung der beiden Polyeder (ggf. sowohl mit verbalen Anteilen als auch mit Verweis auf zeichnerische Darstellung) 3

Dreitafelbilder:

Lage-, Größenverhältnisse in zeichnerisch hinreichend genauer Ausführung (genaue Übernahme der Längen aus Abb. A 311043 B ist nicht entscheidend, vielmehr die *im Aufgabentext geforderten* Rechteckeigenschaften des Grundrisses und das Höhenverhältnis 1:2) 2

Korrekte Punktbezeichnungen im Grund-, Auf- und Seitenriß, zutreffende Angabe verdeckter und unverdeckter Strecken ... 2

7

31. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 10
2.Tag

311044 Lösung: 7 Punkte

I. Für jedes Paar $(m;n)$ natürlicher Zahlen mit $m > 100$ und $d = n-m > 8$ gilt $\overline{n} - \overline{m} > n-m$. Beweis:

(a) Hat eine natürliche Zahl $z > 100$ bei Darstellung im Ziffernsystem mit der Basis 9 eine letzte Ziffer $e < 8$, so gilt: Um in Ziffernsystem mit der Basis 9 die Darstellung von $z+1$ zu erhalten, hat man e durch $e+1$ zu ersetzen und alle vorangehenden Ziffern unverändert zu lassen. Damit ergibt sich $\overline{z+1} = \overline{z} + 1$.

(b) Ist die genannte Ziffer aber $e = 8$, so gilt: Die Darstellung von z besteht aus einer (eventuell leeren) Ziffernfolge F, die nicht mit 8 endet, und anschließend einer Anzahl p (≥ 1) Ziffern 8. Um daraus die Darstellung von $z+1$ zu erhalten, hat man die letzte Ziffer von F um 1 zu erhöhen (bzw. die leere Folge F durch 1 zu ersetzen) und jede der anschließenden p Ziffern 8 durch je eine Ziffer 0 zu ersetzen. Bei dekadischer Deutung bewirkt dies eine Erhöhung von $\overline{z}$ um eine Zahl mit der Endziffer 2, also wird $\overline{z+1} \geq \overline{z} + 2$.

(c) Unter den d Zahlen $z = m, m+1, m+2, \ldots , n-1$ befindet sich wegen $d > 8$ mindestens eine, auf die Fall (b) zutrifft. Wendet man daher auf diese Zahlen der Reihe nach den jeweils zutreffenden Schluß (a) oder (b) an, so erhält man $\overline{m+d} > \overline{m} + d$, also $n-m = d < \overline{m+d} - \overline{m} = \overline{n} - \overline{m}$.

II. Zu jeder der Zahlen $k = 0,1,2,\ldots,7$ gibt es ein Paar $(m;n)$ natürlicher Zahlen mit $m > 100$ und $n-m > k$, für das die Ungleichung $\overline{n} - \overline{m} > n-m$ nicht gilt. Beweis: Ein solches Paar (sogar zu allen genannten k einheitlich) bilden beispielsweise $m = 108 = 1\cdot 9^2 + 3\cdot 9 + 0$ und $n = 116 = 1\cdot 9^2 + 3\cdot 9 + 8$; denn für sie gilt $\overline{m} = 130$, $\overline{n} = 138$, also $\overline{n} - \overline{m} = 8 = n-m$.

Mit I. ist, wie gefordert, die Existenz eines k bewiesen, das den Schluß von $n-m > k$ auf $n-m < \overline{n} - \overline{m}$ zuläßt (nämlich $k = 8$ ist ein solches k). Zusammen mit II. ist ferner $k = 8$ als die kleinste derartige Zahl nachgewiesen.

311045 Lösung: (Abb.L 311045 auf S.3.) 7 Punkte

Die Frage ist zu bejahen. Ein Beweis ist wie folgt möglich:

I. Jedes Dreieck kann in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck zerlegt werden. Beweis hierzu (Abb.L 311045 a):
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Für die Größen α,β,γ der Innenwinkel bei A,B,C gelte o.B.d.A. $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Der Fußpunkt F der zu AB senkrechten Höhe liegt dann zwischen A und B. Da ferner $\overline{\measuredangle BCF} < 90^\circ$ gilt, kann man einen Punkt D zwischen A und F so nahe bei F wählen, daß auch noch $\overline{\measuredangle BCD} < 90^\circ$ ist. Dann ist $\Delta\, ADC$ bei D stumpfwinklig und $\Delta\, DBC$ spitzwinklig.

II. Jedes stumpfwinklige Dreieck kann in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden. Beweis hierzu (Abb.L 311045 b):

Es sei ABC ein beliebiges bei C stumpfwinkliges Dreieck. Sein Inkreis k habe den Mittelpunkt M; er schneide AM bzw. BM in S bzw. T. Die in S an k gelegte Tangente schneidet AB in einem Punkt D zwischen A und B, und sie schneidet AC in einem Punkt E zwischen A und C. Die in T an k gelegte Tangente schneidet BD in einem Punkt F zwischen B und D, und sie schneidet BC in einem Punkt G zwischen B und C.

Zerlegt man ABC in die Dreiecke ADE, BFG, EDM, DFM, FGM, GCM, CEM, so kann man für deren Innenwinkel der Reihe nach die folgenden in Abb.L 311045 b angegebenen Größen ermitteln:

$\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, da AM, BM, CM Winkelhalbierende des Dreiecks ABC sind;

$90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \frac{\beta}{2}$, da $AS \perp DE$ bzw. $BT \perp FG$ gilt;

$45^\circ + \frac{\alpha}{4}$, $45^\circ + \frac{\beta}{4}$, da für die Lote MU, MV, MW von M auf BC, CA, AB gilt: Die Dreiecke DMW, DMS, EMS, EMV sind zueinander kongruent, ebenso FMW, FMT, GMT, GMU ; also halbieren DM, EM, bzw. FM, GM Außenwinkel der Dreiecke ADE bzw. BFG.

Aus dem Innenwinkelsatz erhält man weiter $\sphericalangle EMD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,

$\sphericalangle DMF = 90^\circ - \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{4}$, $\sphericalangle FMG = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle GMC = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4}$ und

$\sphericalangle CME = 45^\circ + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}$. Endlich gilt: Wegen $\alpha, \beta > 0$ sind $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,

$90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, $90^\circ - \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{4}$ kleiner als 90° ; aus

$\gamma > 90^\circ$, also $\alpha + \beta < 90^\circ$ folgt $45^\circ + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 90^\circ$; daher sind

auch α, β, $45^\circ + \frac{\alpha}{4}$, $45^\circ + \frac{\beta}{4}$, $45^\circ + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4}$, $45^\circ + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}$ kleiner als 90° .

<u>311046 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ sind $p = 2 - \sqrt{3}$ und $q = 2 + \sqrt{3}$. Für die Zahlen

$a_n = p^n + q^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

gilt $a_n > 0$ sowie

$$a_0 = 2 \ , \quad a_1 = 4 \ , \quad a_2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 14 \qquad (1)$$

und

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = p^n(p^2 - 4p + 1) + q^n(q^2 - 4q + 1) = 0 \ . \qquad (2)$$

$p^{n+2}+q^{n+2} - 4(p^{n+1}+q^{n+1}) + p^n+q^n =$

Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen: Für $m = 0,1,2,\ldots$ sind a_{3m}, a_{3m+1}, a_{3m+2} ganze Zahlen mit 2 bzw. 4 bzw. 4 als letzter Ziffer: Für $m = 0$ folgt dies aus (1), und trifft es für ein $m = k \geq 0$ zu, so ist nach (2) jeweils

$a_{3(k+1)} = 4 \cdot a_{3k+2} - a_{3k+1}$ eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 4 - 4 = 12$,

$a_{3(k+1)+1} = 4 \cdot a_{3k+3} - a_{3k+2}$ eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 2 - 4 = 4$,

$a_{3(k+1)+2} = 4 \cdot a_{3k+4} - a_{3k+3}$ eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 4 - 2 = 14$.

Wegen $1992 = 3 \cdot 664$ hat somit a_{1992} die letzte Ziffer 2. Ferner ist $0 < p < 1$, also

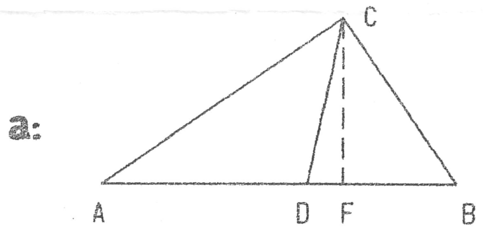
$$p^{1992} - 1 < 0 < p^{1992} .$$

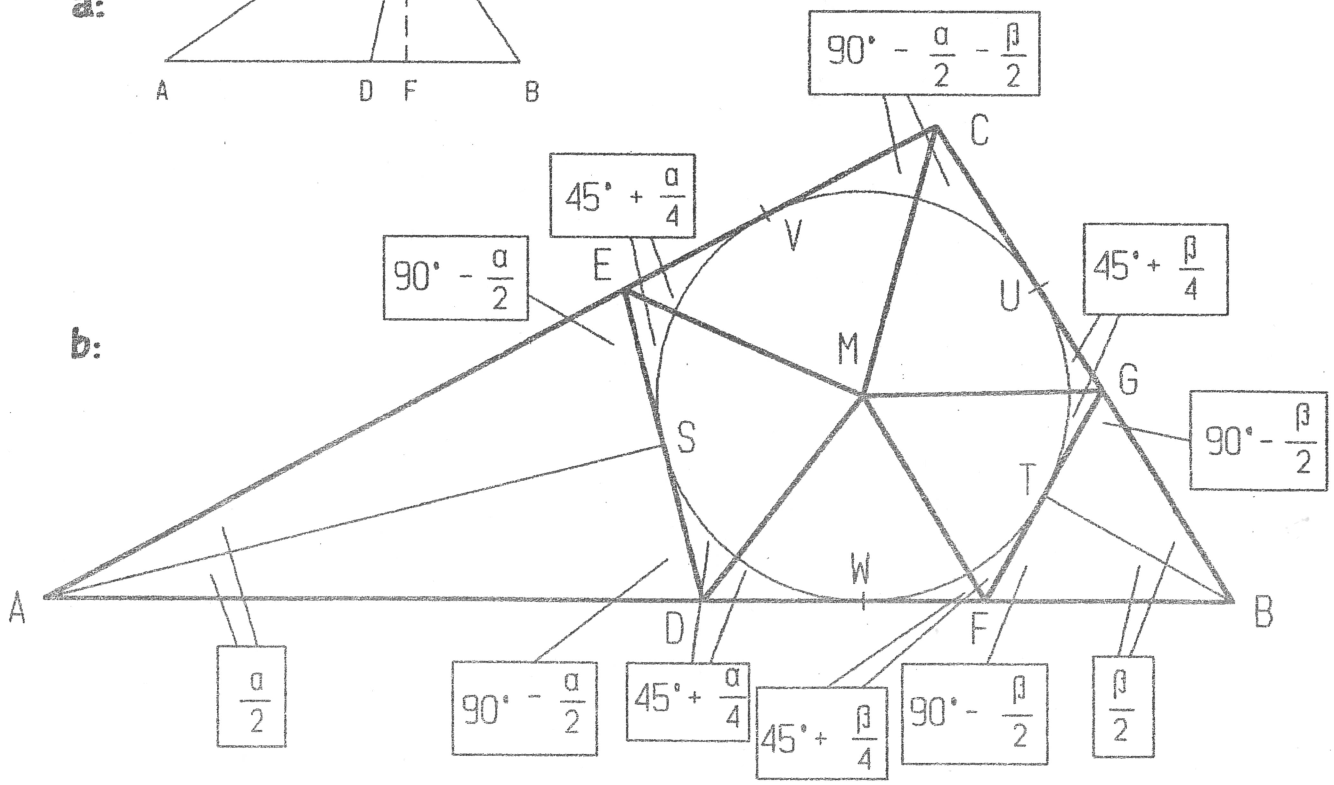
Nach Addition von q^{1992} folgt

$$a_{1992} - 1 < q^{1992} < a_{1992} ;$$

d.h., q^{1992} liegt zwischen zwei ganzen Zahlen, deren letzte Ziffer 1 bzw. 2 ist. Damit ergibt sich $[q^{1992}] = 1$.

Abb.L 311045





Vorschläge zur Punktverteilung

311044

Beweis, daß mit $k=8$ der Schluß von $n-m>k$ auf $n-m < \overline{n}-\overline{m}$ gilt; mögliche Teilschritte:

Diskussion der Beziehung zwischen $\overline{z+1}$ und $\overline{z}+1$ ... 3
Nutzung, daß hierin (stets $\geq$ und) bei je mindestens 8 aufeinanderfolgenden Zahlen stets > gilt ... 2
$\Big\}$ ... 5

Beweis, daß mit keinem $k<8$ der Schluß von $m>100$ und $n-m>k$ auf $n-m < \overline{n}-\overline{m}$ gilt
(z.B. durch Aufweisen eines Gegenbeispiels) 2

7

311045

Beschreibung einer Zerlegung in 8 Teildreiecke:
(Punktvergabe ggf. aufgeteilt - siehe unten - in: 1 + 2) ... 3

Nachweis, daß alle Teildreiecke spitzwinklig sind:
(Punktvergabe ggf. aufgeteilt in: .... 1 + 3) ... 4

Die Aufteilung ist vorzunehmen, wenn zunächst die Aussage bewiesen wird, daß jedes Dreieck in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck zerlegt werden kann; hierfür gilt jeweils die erstgenannte Punktzahl.

7

311046

Aussagen über eine nahe bei q^{1992} gelegene ganze Zahl, z.B. a_{1992}:

Beschreibung; Nachweis der Ganzzahligkeit 3

Ermittlung der letzten Ziffer 2

(Gewinnung dieser Aussagen z.B. rekursiv. Werden dabei beide Aussagen zugleich bewiesen, so ist auch folgende Aufteilung möglich: Anfangsschritt(e): 2; Induktionsschritt(e): 3)

Schluß auf die letzte Ziffer von $[q^{1992}]$ 2

7