31. Mathematik-Olympiade

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1.Tag

<u>Hinweis:</u>*Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.

<u>311031</u>

Beweisen Sie,

a) daß $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 24}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 23 \cdot 25} > \dfrac{1}{5}$ gilt,

b) daß für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ die Ungleichung

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2m-1)} > \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$$

gilt!

<u>311032</u>

Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x;y)$

a) die Gleichung $[x]^2 + [y]^2 = 1$,

b) die Gleichung $[x^2] + [y^2] = 1$

erfüllen. Gegebenenfalls ist jeweils durch einen der Zeichnung beigefügten Text zu sichern, daß für jeden Punkt der Ebene eindeutig aus der Darstellung hervorgeht, ob er zur Menge der anzugebenden Punkte gehört oder nicht.
<u>Hinweis:</u> Ist z eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq z < g+1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

<u>311033</u>

Es sei ABCDS eine Pyramide; ihre Grundfläche sei ein Quadrat ABCD, das Lot von der Spitze S auf die Grundfläche habe als Fußpunkt den Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates ABCD. Ferner sei H der Mittelpunkt der Strecke MS; das Lot von H auf die Seitenfläche BCS habe den Fußpunkt F, das Lot von H auf die Kante CS habe den Fußpunkt K.
Unter diesen Voraussetzungen berechne man aus den gegebenen Längen $f = \overline{HF}$ und $k = \overline{HK}$ das Volumen der Pyramide ABCDS.

31. Mathematik-Olympiade

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

2.Tag

311034

a) Untersuchen Sie, wieviele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1),(2),(3) genügen!

(1) Es gilt $t > 1$.

(2) Die Zahl $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ ist rational.

(3) In der Darstellung $t = \frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n, m ist $n = 1000$.

b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n = 10000$ anstelle von $n = 1000$ steht!

311035

Es sei $ABCD$ ein gegebenes Parallelogramm. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke AB liegt, sei S der Schnittpunkt der Strecken AC und PD.

a) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC gleich einem Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$?

b) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC möglichst groß?

311036

Beweisen Sie, daß es unendlich viele verschiedene Paare (f,g) von Funktionen gibt, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:

(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es gilt $f(0) = 1992$.

(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.

Hinweis: Zwei Paare (f_1,g_1) und (f_2,g_2) von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, sind genau dann voneinander verschieden, wenn es (mindestens) eine reelle Zahl x gibt, für die (mindestens) eine der Ungleichungen $f_1(x) \neq f_2(x)$, $g_1(x) \neq g_2(x)$ gilt.

31. Mathematik-Olympiade
Lösungen
Olympiadeklasse 10
1.Tag

311031 Lösung: 6 Punkte

Die Aussage zu a) kann, nachdem b) gelöst ist, als Spezialfall ($m = 13$) gefolgert werden. Andererseits gibt es zu a) verschiedene Möglichkeiten des rechnerischen Nachweises, wobei die einzelnen Rechenschritte genügend deutlich angegeben bzw. begründet werden müssen.

1.Beispiel: Durch Multiplikation von

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
2 & & & \cdot 8 & & & & \cdot 16 & & & & & >247= & & 13 & & & \cdot 19 & & & & , \\
 & 4 & & & & \cdot 4 & & & & & & \cdot 8 & >119= & & & & 17 & & \cdot 7 & & & , \\
 & & 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 & \cdot 4 & \cdot 2 & & >115= & & & 5 & & & & \cdot 23 & & , \\
 & & 3 & & \cdot 5 & \cdot 3 & \cdot 7 & & \cdot 9 & \cdot 5 & \cdot 11 & \cdot 3 & = & 3\cdot 7\cdot 9\cdot 11 & & \cdot 3 & & & \cdot 3 & & \cdot 25 &
\end{array}$$

ergibt sich

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18\cdot 20\cdot 22\cdot 24 > 3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\cdot 19\cdot 21\cdot 23\cdot 25$$

und daraus nach Division durch $3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot 23\cdot 25$ die Behauptung.

2.Beispiel: Für die Produkte $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$, ... , $p_{12} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot \cdots \cdot\frac{24}{25}$ ergibt sich der Reihe nach

$p_1>0,66$; $p_2>0,66\cdot 4:5>0,52$; $p_3>0,52\cdot 6:7>0,44$; $p_4>0,44\cdot 8:9>0,39$;

$p_5>0,39\cdot 10:11>0,35$; $p_6>0,35\cdot 12:13>0,32$; $p_7>0,32\cdot 14:15>0,29$;

$p_8>0,29\cdot 16:17>0,27$; $p_9>0,27\cdot 18:19>0,25$; $p_{10}>0,25\cdot 20:21>0,23$;

$p_{11}>0,23\cdot 22:23=0,22$; $p_{12} > 0,22\cdot 24:25>0,21 > \frac{1}{5}$.

Zu b): Für jede natürliche Zahl $n\geq 2$ gilt

$$n^2 > n^2-1 = (n-1)(n+1) .$$

Division durch die positive Zahl $(n+1)^2$ ergibt

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 > \frac{n-1}{n+1} > 0 .$$

Wendet man dies mit $n = 2,4,6,\ldots,2m-4,2m-2$ an (wegen $m\geq 2$ ist $2m-2 \geq 2$) und multipliziert die erhaltenen Ungleichungen, so ergibt sich

$$\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot(2m-4)\cdot(2m-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot(2m-3)\cdot(2m-1)}\right)^2 > \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot(2m-5)\cdot(2m-3)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot(2m-3)\cdot(2m-1)} = \frac{1}{2m-1} ;$$

wegen $2m-1 > 0$ folgt durch Wurzelziehen die Behauptung.

Bemerkung: Da hier sogar die Faktoren $(n/(n+1))^2$ einzeln abgeschätzt werden, kann der Beweis auf gleicher rechnerischer Grundlage auch als Beweis durch vollständige Induktion ausgeführt werden.

311032 Lösung: 7 Punkte

a) Für die ganzen Zahlen $g = [x]$, $h = [y]$ gilt genau dann die zu erfüllende Gleichung $g^2 + h^2 = 1$, wenn einer der nachstehenden vier Fälle vorliegt (siehe Abb.L 311032 a; die im folgenden genannten Flächen sind einschließlich ihres Randes zu verstehen, die - als wegzulassend vermerkten - Strecken einschließlich ihrer Endpunkte):

I. $g = 1$, $h = 0$, d.h. $1 \leq x < 2$, $0 \leq y < 1$
(Quadratfläche EFKJ ohne die Strecken FK, KJ);

II. $g = -1$, $h = 0$, d.h. $-1 \leq x < 0$, $0 \leq y < 1$ (CDHG ohne DH,HG);

III. $g = 0$, $h = 1$, d.h. $0 \leq x < 1$, $1 \leq y < 2$ (HJML ohne JM,ML);

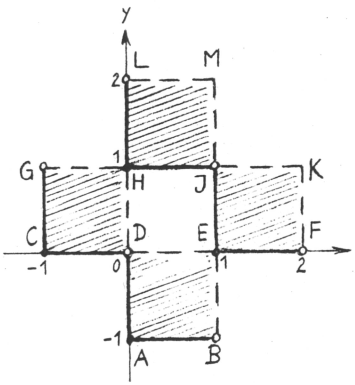
IV. $g = 0$, $h = -1$, d.h. $0 \leq x < 1$, $-1 \leq y < 0$ (ABED ohne BE,ED).

b) Für die - wegen der für alle reellen x,y geltenden Ungleichungen $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$ nicht negativen - ganzen Zahlen $u=[x^2]$, $v=[y^2]$ gilt genau dann die zu erfüllende Gleichung $u+v=1$, wenn einer der nachstehenden zwei Fälle vorliegt (Abb.L 311032 b):

I. $u = 1$, $v = 0$, d.h. $1 \leq x^2 < 2$, $0 \leq y^2 < 1$, d.h.
($-\sqrt{2} < x \leq -1$ oder $1 \leq x < \sqrt{2}$) und ($-1 < y < 1$)
(Vereinigungsmenge der Rechtecksfläche CDHG ohne die Strekken DC,CG,GH und der Rechtecksfläche EFKJ ohne EF,FK,KJ);

II. $u = 0$, $v = 1$, d.h. $0 \leq x^2 < 1$, $1 \leq y^2 < 2$, d.h.
($-1 < x < 1$) und ($-\sqrt{2} < y \leq -1$ oder $1 \leq y < \sqrt{2}$)
(Vereinigungsmenge der Rechtecksfläche ABED ohne DA,AB,BE und der Rechtecksfläche HJML ohne HL,LM,MJ).

Die Vereinigungsmenge der jeweils durch die Hervorhebung in Abb. L 311032 a bzw. b zusammen mit diesen Erläuterungen dargestellten Flächen ist die Menge der in a) bzw. b) anzugebenden Punkte.



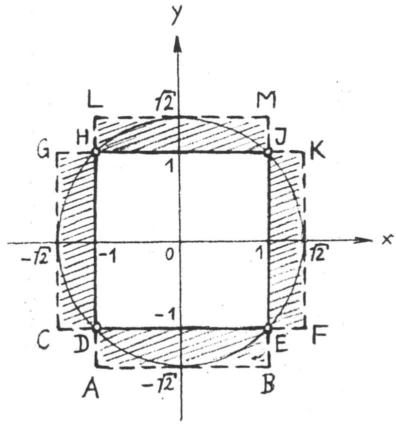


Abb.L 311032 a

Abb.L 311032 b

311033 Lösung: 8 Punkte

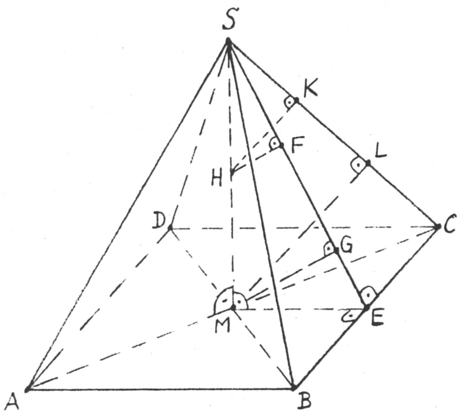


Abb.L 311033

Es sei E der Mittelpunkt von BC. Da BCS mit $\overline{BS}=\overline{CS}$ gleichschenklig ist (wie aus den mit $\overline{\sphericalangle\, BMS} = \overline{\sphericalangle\, CMS} = 90^\circ$ und $\overline{BM}=\overline{CM}$ nach Kongruenzsatz sws kongruenten Dreiecken BMS, CMS folgt), ist die Seitenhalbierende SE zugleich Höhe. Wegen SE $\perp$ BE und ME $\perp$ BE ist folglich BE senkrecht zur Ebene durch E,M,S. Das Lot MG von M auf SE liegt in dieser Ebene und ist daher nicht nur zu SE, sondern auch zur Richtung von BE senkrecht; also ist es auch das Lot von M auf die Fläche BCS.

Die Lote MG und HF auf BCS sind zueinander parallel; nach dem Strahlensatz folgt $f = \frac{1}{2}\,\overline{MG}$. Mit $a = \overline{AB}$, $h = \overline{MS}$ gilt ferner $\overline{ME} = \frac{a}{2}$; im rechtwinkligen Dreieck EMS ist

$$\overline{ES} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2} \; .$$

Der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks beträgt sowohl $\overline{ME}\cdot\overline{MS}$ als auch $\overline{ES}\cdot\overline{MG}$; daher ist $\frac{1}{2}\,\overline{MG} = \overline{ME}\cdot\overline{MS} : (2\,\overline{ES})$ und folglich

$$f = \frac{a \cdot h}{2\sqrt{a^2 + 4h^2}} \; . \qquad (1)$$

Auch für die (in CMS liegenden) Lote ML, HK von M bzw. H auf CS gilt HK $\parallel$ ML und nach dem Strahlensatz $k = \frac{1}{2}\,\overline{ML}$; mit $MC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ erhält man im rechtwinkligen Dreieck CMS zunächst

$$\overline{CS} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^2 + 2h^2}$$

und dann

$$k = \frac{a \cdot h}{2\sqrt{a^2 + 2h^2}} \; . \qquad (2)$$

Vermittels (1) und (2) kann man a und h durch f und k ausdrücken: Aus (2) folgt

$$4k^2(a^2 + 2h^2) = a^2h^2 , \tag{3}$$

aus (1) und (2) folgt

$$f^2(a^2 + 4h^2) = k^2(a^2 + 2h^2) , \quad 2h^2(2f^2 - k^2) = a^2(k^2 - f^2) ;$$

wegen $k > f$ kann man hieraus

$$a^2 = 2h^2 \cdot \frac{2f^2 - k^2}{k^2 - f^2} , \qquad a^2 + 2h^2 = 2h^2 \cdot \frac{f^2}{k^2 - f^2} \tag{4}$$

erhalten und in (3) einsetzen. Das ergibt nach Division durch $2h^2$

$$\frac{4k^2f^2}{k^2 - f^2} = \frac{(2f^2 - k^2)h^2}{k^2 - f^2} , \qquad h = \frac{2kf}{\sqrt{2f^2 - k^2}} \tag{5}$$

und damit nach (4)

$$a^2 = \frac{8k^2f^2}{k^2 - f^2} . \tag{6}$$

Aus (5) und (6) erhält man, wie verlangt, für das Volumen V der Pyramide

$$V = \frac{1}{3}\, a^2h = \frac{16}{3} \cdot \frac{k^3f^3}{(k^2 - f^2) \cdot \sqrt{2f^2 - k^2}} .$$

31. Mathematik-Olympiade
Hinweise zur Korrektur, Vorschläge zur Punktverteilung

Olympiadeklasse 10
1.Tag

Für jede Aufgabe ist die zum Lösungstext genannte Gesamtpunktzahl beizubehalten, während die unten skizzierte weitere Aufteilung im Sinn eines Vorschlags gegeben wird und als Grundlage zur individuellen Einschätzung der vom Schüler erbrachten *Bestandteile* *eines zum Ziel führenden* Lösungsweges dient („additive Punktvergabe", auch bei insgesamt unvollständiger Lösung und ohne Festlegung auf einen bestimmten Lösungsweg. „Erbracht" heißt „im Text *ersichtlich*", nicht nur hinein-interpretiert.)
Die hier gegebenen Lösungstexte selbst sind als Angabe derartiger Bestandteile eines möglichen vollständigen Lösungsweges konzipiert; sie sind *nicht etwa „Musterlösungen"*, die in angegebener Formulierung vom Schüler zu erwarten wären. So sollen z.B. „übertrieben genaue" Formulierungen auf Lösungsteile hinweisen, die in verschiedenartigen schülergemäßen Fassungen erbracht werden können, aber jedenfalls (bei Wahl dieses Lösungsweges) nicht fehlen dürfen. Gelegentlich enthält der Lösungstext auch - in Gestalt von Fußnoten, „Hinweisen", „Bemerkungen" oder in Klammern gesetzten Texteinschüben - Angaben, die zu einem vollständigen Lösungsweg nicht erforderlich sind.
Das *Zitieren* eines ohne Beweis benutzten mathematischen Sachverhaltes ist als ausreichender Teilschritt (anteilig) zu werten, wenn es mit üblicher oder genügend deutlicher Kennzeichnung geschieht (z.B. „Jensensche Ungleichung", „Winkelsumme im Tangentenviereck") oder durch inhaltliche Angabe erfolgt (z.B. Voraussetzung und Behauptung eines Satzes). Im Sinne einer Grenzfall-Problematik ist bei Auftreten der Frage zu handeln, ob ein Zitat nicht akzeptabel sei, da laut Aufgabentext ein Beweis(schritt) als *gefordert* anzusehen sei. Ähnliches gilt zur Frage der Anerkennung *anschaulicher* Beweismittel und zum Akzeptieren altersgerechter Beweislücken. Beispiel: Zwar möglicherweise Verzicht auf *Beweis zu* (bzw. Herleitung aus) geometrischen *Lageaussagen*; aber Forderung nach *Berücksichtigung* aller Lagemöglichkeiten.

<u>Punktverteilungsvorschläge:</u>

<u>311031</u>

a) [Getrennter oder auf b) zurückgeführter Nachweis]	2
b) Herleitung von (z.B.) $n^2/(n+1)^2 > (n-1)/(n+1)$	2
Abschließende Herleitung der geforderten Ungleichung	2
	6

<u>311032</u>

Zweckmäßige Fallunterscheidung	2
Herleitung der Teil-Punktmengen in den Fällen	2
Zeichnung und ergänzende Textbeschreibung	3
	7

<u>311033</u>

Herleitung (z.B.) eines Ausdrucks für f durch a und h:	
Lage- und Längenaussagen über (z.B.) MG, ME	2
" " " " " ES, HF	2
Entsprechendes Vorgehen (z.B.) für k	2
Abschließend: Ausdrücke für (z.B. a,h und) V durch f und k	2
	8

31. Mathematik-Olympiade

Lösungen

Olympiadeklasse 10

2.Tag

311034 Lösung: 7 Punkte

a) Wenn eine rationale Zahl t die Bedingung (2) erfüllt, d.h. $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$ eine rationale Zahl ist, so ist $\sqrt{t} = z^2 - t$ ebenfalls eine rationale Zahl. Nun gilt der Satz[1]: Ist $t = \frac{n}{m}$ die Darstellung von t als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen und $\sqrt{t}$ rational, so sind n und m Quadratzahlen. Da 1000 keine Quadratzahl ist, können folglich die Bedingungen (2) und (3) nicht zusammen erfüllt werden, also gibt es keine Zahl der in a) genannten Art.

b) Wenn t eine rationale Zahl ist, die (1),(2),(3) mit n=10000 (statt n=1000) erfüllt, so folgt nach dem in a) genannten Satz, daß
$$t = \frac{100^2}{r^2} \qquad (*)$$
mit einer zu 100 teilerfremden natürlichen Zahl r ist. Jede so darstellbare Zahl t erfüllt (3); ferner ist für sie (2) äquivalent dazu, daß die Zahl $z = \sqrt{\left(\frac{100}{r}\right)^2 + \frac{100}{r}} = \frac{10}{r} \cdot \sqrt{100 + r}$ rational ist, also auch dazu, daß $\sqrt{100 + r}$ rational ist. Es gilt der Satz[2]: Die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl N ist genau dann rational, wenn N eine Quadratzahl ist. Ferner ist die Bedingung (1) für Zahlen (*) äquivalent zu $r < 100$.

Diejenigen zu 100 teilerfremden natürlichen Zahlen $r < 100$, mit denen $100 + r$ eine Quadratzahl ist, sind aber genau die beiden Zahlen $r = 21$ und $r = 69$. Daher werden die in b) zu betrachtenden Bedingungen (1),(2),(3) von genau 2 Zahlen erfüllt (nämlich von $t = 10000/441$ und von $t = 10000/4761$).

Bemerkung: Wird (statt der hier verwendeten Äquivalenzen) nur von (1),(2),(3) auf diese beiden t-Werte geschlossen, so ist dann noch umgekehrt erforderlich, zu bestätigen, daß für diese Werte die Bedingungen (1),(2) und (vor allem) (3) erfüllt sind.

---

[1] Zitat als bekannter Satz oder z.B. folgender Beweis: Es sei $\sqrt{t} = \frac{s}{r}$ mit ebenfalls zueinander teilerfremden natürlichen Zahlen r,s. Dann folgt $nr^2 = ms^2$. Jede Primzahl, die Teiler von n ist, ist nicht Teiler von m, muß also Teiler von s^2 und daher von s sein. Also kommt sie in der Zahl $nr^2 = ms^2$ mit gerader Anzahl als Faktor vor. In r und damit in r^2 kommt sie wegen der Teilerfremdheit von r und s gar nicht vor, also ist sie mit der ebengenannten geraden Anzahl in n als Faktor enthalten. Damit ist n als Quadratzahl nachgewiesen. Ebenso beweist man, daß auch m eine Quadratzahl ist.

[2] Siehe Fußnote 1) mit m=1 und t=n=N oder die Fußnote zu 311024.

311035 Lösung: 6 Punkte

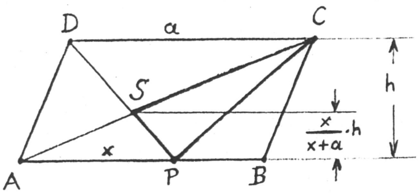


Abb.L 311035

Mit den Bezeichnungen $\overline{AB} = \overline{DC} = a$ und $\overline{AP} = x$ gilt für jede Lage von P auf AB: Nach dem Strahlensatz verhalten sich die Abstände des Punktes S von AP und von DC wie $x : a$. Hat das Parallelogramm ABCD die auf AB senkrechte Höhe h, so hat also S den Abstand $\frac{x}{x+a} \cdot h$ von AP.

Der Flächeninhalt von SPC ergibt sich, indem man vom Flächeninhalt des Dreiecks APC den des Dreiecks APS subtrahiert; er beträgt also

$$\frac{1}{2}\, x \cdot h \;-\; \frac{1}{2}\, x \cdot \frac{x \cdot h}{x+a} \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{ahx}{x+a}\,.$$

a) Daher ist dieser Flächeninhalt genau dann gleich $\frac{1}{6}\, a \cdot h$, wenn $\frac{x}{x+a} = \frac{1}{3}$ gilt, d.h. genau für $3x = x + a$, $x = \frac{a}{2}$; also genau dann, wenn P der Mittelpunkt von AB ist.

b) Ferner wird durch $\frac{x}{x+a} = 1 - \frac{a}{x+a}$ $(0 \leq x \leq a)$ eine streng monoton steigende Funktion von x gegeben; also ist der Flächeninhalt von SPC genau dann möglichst groß, wenn x möglichst groß ist; d.h. genau dann, wenn $P = B$ ist.

2.Lösungsweg: Da der Flächeninhalt von APC gleich dem von APD ist, folgt durch Subtraktion des Flächeninhalts von APS: Der Flächeninhalt von SPC ist gleich dem von ASD. Damit ergibt sich weiter:

a) Der Flächeninhalt von ASD ist genau dann gleich einem Sechstel des Flächeninhalts von ABCD, d.h. gleich einem Drittel des Flächeninhalts von ACD, wenn $\overline{AS} = \frac{1}{3}\, \overline{AC}$ oder, äquivalent hiermit, $\overline{AS} = \frac{1}{2}\, \overline{SC}$ gilt. Nach dem Strahlensatz ist $\overline{AS} : \overline{SC} = x : a$; somit ist die Bedingung $\overline{AS} = \frac{1}{2}\, \overline{SC}$ äquivalent mit $x = \frac{a}{2}$.

b) Bewegt sich P von A nach B, so bewegt sich S von A bis zum Mittelpunkt der Diagonale AC. Der Flächeninhalt von ASD wächst hierbei streng monoton, ist also genau dann möglichst groß, wenn $P = B$ ist.

311036 Lösung: 6 Punkte

Zu dem geforderten Nachweis genügt es, unendlich viele Paare von Funktionen anzugeben, die Bedingungen (1), (2) und (3) für jedes dieser Paare als erfüllt sowie je zwei dieser Paare als voneinander verschieden nachzuweisen. Ein Beispiel für eine Lösung dieser Art ist etwa das folgende:

Für unendlich viele (zum Beispiel alle natürlichen) Zahlen n sei (f_n, g_n) das Paar derjenigen Funktionen, die für alle reellen x durch

$$f_n(x) = 1992 \cdot 2^x \;, \quad g_n(x) = n \cdot x + 1$$

definiert sind.

Damit sind offensichtlich (1) und (2) erfüllt, (3) wird durch

$$\frac{(n \cdot x + 1) \cdot 1992 \cdot 2^{x+1}}{1992 \cdot 2^x} = (n \cdot x + 1) \cdot 2 = (n \cdot 2x + 1) + 1$$

bestätigt, und für je zwei $n \neq m$ sind die Paare (f_n, g_n), (f_m, g_m) voneinander verschieden, wie z.B. aus $g_n(1) = n+1 \neq m+1 = g_m(1)$ folgt.

Bemerkung: Das hier genannte Beispiel kann gefunden werden, indem man für f eine Funktion mit konstantem $f(x+1) : f(x) = k$ ansetzt (zusammen mit (2) als Beispiel eben $f(x) = 1992 \cdot k^x$) und die Bedingung (3), d.h. $k \cdot g(x) = g(2x) + 1$, durch einen linearen Ansatz $g(x) = nx + p$ zu erfüllen versucht, was auf $knx + kp = 2nx + p + 1$ führt. Soll dies für alle x gelten, so folgt $kn = 2n$, $kp = p+1$, was mit beliebigem n (also für unendlich viele g) durch $k=2$, $p=1$ erreicht wird. [Derartige Darlegungen zur Heuristik sind (zwar nützlich, aber) für eine vollständige Lösung im einleitend genannten Sinn nicht erforderlich.]

In allgemeinerem Lösungsansatz kann man für alle reellen x *beliebige* von 0 und von -1 verschiedene Funktionswerte g(x) wählen, ferner für alle x des Intervalls $0 < x < 1$ *beliebige* von 0 verschiedene Funktionswerte f(x) sowie $f(0) = 1992$. Dann lassen sich Funktionswerte von f in den Intervallen $n \leq x < n+1$, der Reihe nach für $n = 1, 2, 3, \ldots$ unter Nutzung von $f(x+1) = \frac{g(2x)+1}{g(x)} \cdot f(x)$, sowie ebenfalls der Reihe nach für $n = -1, -2, -3, \ldots$ unter Nutzung von $f(x) = \frac{g(x)}{g(2x)+1} \cdot f(x+1)$ definieren. Damit erweisen sich sofort (1),(2),(3) als erfüllt, und wegen der eingangs offenen Wahlmöglichkeiten ergeben sich unendlich viele verschiedene Funktionenpaare (f,g).

31. Mathematik-Olympiade
Vorschläge zur Punktverteilung
Olympiadeklasse 10
2.Tag

311034

a) Erste Schlußfolgerung, z.B.: $\sqrt{t}$ ist rational 1
Herleitung eines Widerspruchs zwischen [(1),] (2),(3) 2

b) Herleitung einleit.Umformung, z.B. $z = (10/r)\cdot\sqrt{100+r}$ 2
Abschl.Nachweis, daß (1),(2),(3) f.genau 2 Werte t gelten .. 2

7

311035

a) Vorbereitende Ermittlung z.B. des Abstandes von S zu AP oder der Inhaltsgleichheit von SPC mit ASD 2

Nachweis der Forderg. genau f.d.Mittelpunkt P von AB 2

b) " " " genau für P = B 2

6

311036

Angabe einer unendlichen Menge von Funktionenpaaren (f,g) 2

Nachweis der geforderten Eigenschaften 2

Nachweis der erforerlichen Verschiedenheiten 2

(Je nach Aufwand ist bei unterschiedlichen Lösungswegen auch eine andere Punktaufteilung möglich.)

6