311021

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	x		x		x			
7		x	x	x				
6	x	x	D	x	x	x	x	x
5		x	x	x				
4	x		x		x			
3			x			x		
2			x				x	
1			x					x

Abb. A 311021

Beim Schachspiel darf die Dame auf dem Schachbrett waagerecht, senkrecht und diagonal um eine beliebige Anzahl Felder gezogen werden. Man sagt auch, diese Felder werden von der Dame bedroht. So sind in der Abbildung A 311021 von der Dame auf c6 genau die angekreuzten Felder bedroht.

Leonhard Euler (1707 - 1783) behandelte die Aufgabe, auf einem Schachbrett 8 Damen so aufzustellen, daß keine dieser Damen eine andere bedroht. Wir wollen die Aufgabe hier durch die Zusatzforderung vereinfachen, daß keine der 8 Damen auf eines der 16 Felder gestellt werden darf, die sowohl den Zeilen 3, 4, 5, 6 als auch den Spalten c, d, e, f angehören.
Man ermittle alle Aufstellungen, die diese Forderungen erfüllen.

Hinweis: Die „verbotenen" Felder wirken nicht etwa als „Sperre der Bedrohung"; z.B. bedroht eine Dame auf b3 auch die Felder g3, h3, f7 und g8.

311022

Eine Kugel K wird zylindrisch so durchbohrt, daß die Achse der Bohrung durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Danach bleibt von der Kugel ein Restkörper C übrig. Dieser ringförmige Körper C hat zwei kreisförmige Kanten; als einzige Größenangabe bekannt sei die Länge h einer zur Bohrungsachse parallelen Strecke, die einen Punkt der einen Kante mit einem Punkt der anderen Kante verbindet.

Andrea behauptet, allein aus h könne man das Volumen V(C) von C ermitteln. Birgit meint dagegen: Da sich der genannte Wert h ausgehend von unterschiedlich großen Kugeln (Radius R) durch jeweils zu R passende Wahl des Radius r der zylindrischen Bohrung habe erreichen lassen, müßten zu diesem h unterschiedliche Werte V(C) möglich sein; man könne also, wenn man weder R noch r kennt, V(C) nicht allein aus h ermitteln. - Wer hat recht?

Hinweis: Für das Volumen V(K), V(A), V(Z) einer Kugel K (Radius R) bzw. eines Kugelabschnitts A („Pfeilhöhe" p ; siehe Abb. A 311022) bzw. eines Zylinders Z (Grundkreisradius r , Höhe h) gelten die Formeln

$$V(K) = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V(A) = \pi R p^2 - \frac{1}{3}\pi p^3, \quad V(Z) = \pi r^2 h .$$

311023

Man beweise, daß sich in einer Ebene 100 verschiedene Geraden so legen lassen, daß die Anzahl aller derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von je mindestens zwei der 100 Geraden sind, genau 1991 beträgt.

311024

Ermtteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t, für die

$\sqrt{t + 24\sqrt{t}}$ rational ist!

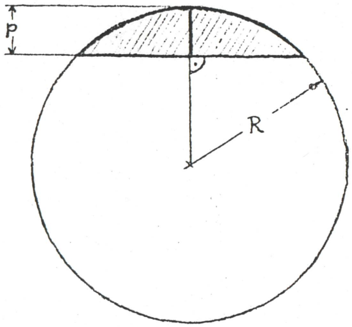

Abb. A 311022

311021 Lösung: 10 Punkte

Da die 8 Damen auf die 8 Zeilen des Schachbretts so verteilt werden müssen, daß keine Zeile mehr als eine Dame enthält, muß in jeder Zeile genau eine Dame stehen. Ist z eine Zeilennummer, so bezeichne D_z die Dame in Zeile z. Ebenso muß in jeder Spalte s genau eine Dame stehen; sie werde auch mit D^s bezeichnet.

Die Damen D_3 , D_4 , D_5 , D_6 können wegen der Zusatzforderung nicht in die Spalten c, d, e, f kommen; sie müssen also in die Spalten a, b, g, h verteilt werden, ebenso D^c , D^d , D^e , D^f in die Zeilen 1, 2, 7, 8. Damit sind außer den bereits ausgeschlossenen 16 Feldern noch weitere 16 Felder ausgeschlossen (siehe in den Abbildungen L 311021 a bis d die Felder „ • ").

1. Steht D_1 auf c1 (Abb. L 311024 a), so folgt: Stünde D^e auf e7 oder e8, so wären alle Felder von Zeile 8 bzw. alle Felder von Zeile 7 ausgeschlossen. Also steht D_e auf e2 (Abb. L 311024 b). Stünde nun D^g auf g3, so wären alle Felder von Spalte h ausgeschlossen; also steht D^g auf g6 (Abb. L 311024 c), und es folgt: D^f steht auf f8 sowie D_7 , D_5 , D_4 , D_3 auf d7, a5, h4, b3 (Abb. L 311024 e).

2. Steht D_1 auf d1 (Abb. L 311024 d), so folgt: Stünde D^a auf a5, so wären alle Felder von Spalte b ausgeschlossen. Stünde D^a auf a3, so erhielte man durch Spiegelung an der Diagonale a1-h8 ein Schachbrett mit Damen auf c1, a4. Wegen D_1 auf c1 könnte man 1. anwenden und erhielte D^a auf a5 im Widerspruch zu D^a auf a4. Also steht (in Abb. L 311021 d) D^a auf a6. Nach einer Drehung um 90° kann man 1. anwenden, dann wieder zurückdrehen und somit eindeutig zu Abb. L 311021 f kommen.

3. Steht D_1 auf f1 oder e1, so kann man nach Spiegelung an der spaltenparallelen Halbierungsgeraden 1. bzw. 2. anwenden und somit eindeutig zu Abb. L 311021 g bzw. Abb. L 311021 h kommen.

Damit sind alle gesuchten Aufstellungen ermittelt.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	•	•	x				•	•
7	•	•	x				•	•
6			•	•	•	•		x
5			•	•	•	•	x	
4			•	•	•	•		
3	x		•	•	•	•		
2	•	•	x	x			•	•
1	•	•	D	x	x	x	•	•

Abb. L 311021 a

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	•	•	x		x		•	•
7	•	•	x		x		•	•
6	x		•	•	•	•		x
5		x	•	•	•	•	x	x
4			•	•	•	•	x	
3	x		•	•	•	•		
2	•	•	x	x	D	x	•	•
1	•	•	D	x	x	x	•	•

Abb. L 311021 b

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	•	•	x		x		•	•
7	•	•	x		x	x	•	•
6	x	x	•	•	•	•	D	x
5		x	•	•	•	•	x	x
4			•	•	•	•	x	
3	x		•	•	•	•	x	
2	•	•	x	x	D	x	•	•
1	•	•	D	x	x	x	•	•

Abb. L 311021 c

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	•	•		x			•	•
7	•	•		x			•	•
6			•	•	•	•		
5			•	•	•	•		x
4	x		•	•	•	•	x	
3		x	•	•	•	•		
2	•	•	x	x	x		•	•
1	•	•	x	D	x	x	•	•

Abb. L 311021 d

	a	b	c	d	e	f	g	h
8						D		
7				D				
6							D	
5	D							
4								D
3		D						
2					D			
1			D					

Abb. L 311021 e

	a	b	c	d	e	f	g	h
8					D			
7			D					
6	D							
5							D	
4		D						
3								D
2						D		
1				D				

Abb. L 311021 f

	a	b	c	d	e	f	g	h
8			D					
7					D			
6		D						
5								D
4	D							
3							D	
2				D				
1						D		

Abb. L 311021 g

	a	b	c	d	e	f	g	h
8				D				
7						D		
6								D
5		D						
4							D	
3	D							
2			D					
1					D			

Abb. L 311021 h

311022 Lösung: 10 Punkte

Die Ebene durch eine der kreisförmigen Kanten (Radius r) trennt von der Kugel (Radius R) einen Kugelabschnitt A (Pfeilhöhe p) ab; das herausgebohrte Kugelstück setzt sich aus zwei solchen einander gleichgroßen Kugelabschnitten und einem Zylinder Z (Grundkreisradius r, Höhe h) zusammen. Ist k dessen halbe Höhe, also

$$h = 2k ,$$

so ist $R = k + p$,

und ein (nach dem Thalessatz) rechtwinkliges Dreieck hat als Hypotenuse die Bohrungsachse (Kugeldurchmesser $2R$); sie wird durch den Fußpunkt der zugehörigen Höhe in die Abschnitte p und $2R - p = 2k + p$ zerlegt. Die Länge dieser Höhe beträgt r , also gilt nach dem Höhensatz

$$r^2 = (2k + p)\cdot p .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} V(C) &= V(K) - (V(Z) + 2\cdot V(A)) \\ &= \frac{4}{3}\pi(k+p)^3 - \pi(2k+p)p\cdot 2k - 2\cdot(\pi(k+p)p^2 - \frac{1}{3}\pi p^3) \\ &= \frac{4}{3}\pi(k^3+3k^2p+3kp^2+p^3) - 2\pi\cdot(2k^2p + kp^2 + kp^2 + \frac{2}{3}p^3) \\ &= \frac{4}{3}\pi k^3 \qquad (= \frac{1}{6}\pi h^3) . \end{aligned}$$

Also ist $V(C)$ durch h eindeutig bestimmt; Andrea hat recht.

<u>311023, 1.Lösungsweg:</u> 10 Punkte

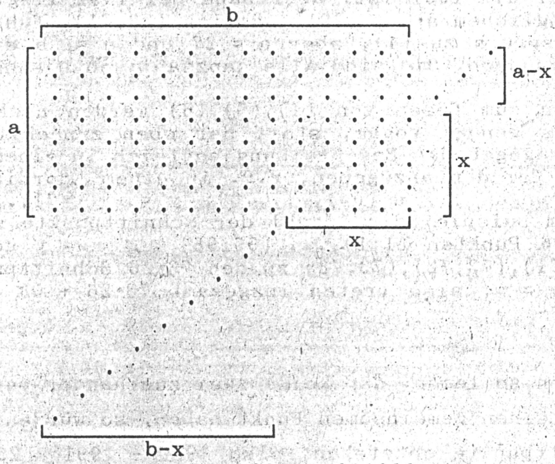

Abb. L 311023

Es sei M_1 eine Menge von a zueinander parallelen Geraden mit einheitlichem Abstand e zwischen je zwei benachbarten dieser Geraden. Ferner sei M_2 eine Menge von $b \geqq a$ Geraden, die zu denen aus M_1 senkrecht sind und von denen ebenfalls je zwei benachbarte den Abstand e voneinander haben.

Dann gibt es genau

$$a \cdot b \text{ Schnittpunkte} \tag{1}$$

von je zwei dieser Geraden. Sie liegen in einem Rechteck R. Eine weitere Gerade g, die mit den Geraden aus M_1 und M_2 Winkel von 45° bildet, kann nun so gelegt werden, daß sie durch genau $x \leqq a$ der Schnittpunkte in (1) geht. Sie hat dann außerhalb des Rechtecks R, also verschieden von den Punkten in (1), mit den Geraden aus M_1 genau

$$a - x \text{ Schnittpunkte} \tag{2}$$

und mit den Geraden aus M_2 genau

$$b - x \text{ Schnittpunkte} . \tag{3}$$

(Abb. L 311023 zeigt die Schnittpunkte für das Beispiel $a = 8$, $b = 14$, $x = 5$.) Die Punkte in (2) sind auch von denen in (3) verschieden (denn ein gemeinsamer Punkt in (2) und (3) läge sowohl auf einer Geraden aus M_1 als auch auf einer aus M_2, also läge er in R).

Nun kann man natürliche Zahlen a , b , x so wählen, daß sie die

Ungleichungen $$x \leqq a \leqq b \tag{4}$$

und die Gleichungen $$a + b + 1 = 100 , \tag{5}$$

$$ab + a + b - 2x = 1991 \tag{6}$$

erfüllen, nämlich $a = 26$, $b = 73$, $x = 3$ (oder $a = 27$, $b = 72$, $x = 26$). Nach (5) sind damit 100 Geraden beschrieben, und nach (1),(2),(3),(6) ist 1991 die Anzahl aller Schnittpunkte von je zwei dieser Geraden.

Bemerkungen: 1. Ganzzahlige Lösungen von (4),(5),(6) kann man z.B. finden, indem man unter den Paaren (a;b) mit (4),(5) solche sucht, bei denen $a \cdot b$ kleiner als 1991 ist, aber nahe bei 1991 liegt. Für das Paar mit größtmöglichem $a \cdot b < 1991$, nämlich (28;71), führt (6) auf $x = 48$ im Widerspruch zu (4), aber $a = 27$ und $a = 26$ ergeben die obengenannten Lösungen. Sie sind alle ganzzahligen Lösungen zu (4),(5),(6).

2. Derartige Angaben zum Lösen von (4),(5),(6) werden nicht vom Schüler verlangt; es genügt sogar, statt der oben zunächst ohne Festlegung von a,b,x gegebenen Beschreibung sogleich in einem konkreten Beispiel 100 Geraden anzugeben, z.B. in einem Koordinatensystem durch Gleichungen $x = u$ $(u=1,\dots,73)$, $y = v$ $(v=71,\dots 96)$, $x = y$, und an diesem Beispiel die Anzahl der Schnittpunkte zu bestätigen: Von den 96 Punkten (1;1),...,(96;96) auf $x = y$ gehören genau die drei (71;71),(72;72),(73;73) zu den $73 \cdot 26$ Schnittpunkten der $x = u$ mit den $y = v$; also treten insgesamt $73 \cdot 26 + 93 = 1991$ Schnittpunkte auf.

2. Lösungsweg:

Würde man 100 Geraden so legen, daß keine zwei zueinander parallel sind und keine drei einen gemeinsamen Punkt haben, so würden genau $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$ Schnittpunkte entstehen, also $4950 - 1991 = 2959$ zu viel. Nun kann man 77 solcher Geraden so ändern, daß sie alle durch einen gemeinsamen Punkt gehen, daß aber ihr Schnittverhalten mit den übrigen 23 Geraden erhalten bleibt (keine parallel zu einer der 23, keine durch einen Schnittpunkt von zwei der 23). Damit verringert sich wegen $\frac{77 \cdot 76}{2} = 2926$ die Anzahl der Schnittpunkte um genau 2925; es verbleiben $2959 - 2925 = 34$ zu viel. Entsprechend kann man nochmals 8 der 23 Geraden ändern und damit die Anzahl der Schnittpunkte wegen $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ um 27 verringern; danach verbleiben 7 zu viel. Zwei weitere Änderungen von 4 Geraden und dann von 3 Geraden verringern wegen $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ bzw. $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ die Anzahl um 5 und um 2 auf die gewünschte Zahl 1991; diese ist damit als erreichbar nachgewiesen.

Bemerkung: Auch zu solchen Lösungswegen genügt es, ohne heuristische Hinführung eine Beschreibung von Geraden mit Bestätigung der Schnittpunktzahl zu geben, etwa wie folgt: Man lege der Reihe nach 77 Geraden durch einen Punkt A, 8 Geraden durch einen Punkt B, 4 Geraden durch einen Punkt C, 3 Geraden durch einen Punkt D, 8 weitere Geraden. Keiner der Punkte B,C,D liege auf einer der jeweils vorher genannten Geraden; jede Gerade sei zu allen vorher genannten nicht parallel und gehe durch keinen Schnittpunkt von zwei vorher genannten Geraden. Die Anzahl der so entstehenden Schnittpunkte ist

$$1 + (1 + 8 \cdot 77) + (1 + 4 \cdot 85) + (1 + 3 \cdot 89) + \left(\frac{8 \cdot 7}{2} + 8 \cdot 92\right) = 1991 .$$

311024 Lösung: 10 Punkte

I. Wenn für eine natürliche Zahl t die Zahl

$$r = \sqrt{t + 24\sqrt{t}} \qquad (1)$$

rational ist, so folgt: Die Zahl $\sqrt{t} = \frac{r^2 - t}{24}$ ist rational.

Es gilt der Satz[1]: Wenn die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl rational ist, so ist sie selbst eine natürliche Zahl. Also gibt es eine natürliche Zahl n mit

$$\sqrt{t} = n \ , \qquad (2)$$

und nach (1) ist $r = \sqrt{n^2 + 24n}$. Wendet man nochmals den genannten Satz an, so folgt: Auch r ist eine natürliche Zahl. Für sie gilt

$$r^2 = n(n + 24) \ . \qquad (3)$$

1. Fortsetzungsmöglichkeit:

Falls $t > 0$, also $r,n > 0$ gilt, sei g der größte gemeinsame Teiler von r,n, mit teilerfremden natürlichen $u,v > 0$ also

$$r = gu \ , \quad n = gv \ . \qquad (4)$$

Aus (3),(4) folgt $g^2u^2 = gv(gv + 24)$, $gu^2 = v(gv + 24)$.

Somit ist v ein Teiler von gu^2, wegen der Teilerfremdheit zu u also ein Teiler von g; d.h., mit natürlichem $h > 0$ gilt

$$g = vh \ , \qquad (5)$$

$vhu^2 = v(hv^2 + 24)$, $24 = h(u^2 - v^2) = h\cdot(u-v)\cdot(u+v)$.

Für diese Zerlegung von 24 in drei ganze Zahlen gibt es unter Beachtung der Ungleichungen $h > 0$, $u+v > 0$, also $u-v > 0$ sowie $u-v < u+v$ und der Teilbarkeit von $(u+v) - (u-v) = 2v$ durch 2 nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle. Darin sind anschließend die resultierenden Werte von u,v sowie nach (5), (4),(2) von g,n,t eingetragen:

h	u-v	u+v	u	v	g	n	t
1	2	12	7	5	5	25	625
1	4	6	5	1	1	1	1
2	2	6	4	2	4	8	64
3	2	4	3	1	3	3	9

Daher kann (1) nur rational sein für die natürlichen Zahlen

$$t = 0 \ , \ 1 \ , \ 9 \ , \ 64 \ , \ 625 \ . \qquad (6)$$

II. Für diese Werte sind in der Tat

$\sqrt{0+24\cdot 0}=0$, $\sqrt{1+24\cdot 1}=5$, $\sqrt{9+24\cdot 3}=9$, $\sqrt{64+24\cdot 8}=16$, $\sqrt{625+24\cdot 25}=35$

rationale Zahlen.

Daher ist (1) genau für die Werte (6) rational.

Andere Fortsetzungsmöglichkeiten: Aus (3) folgt $n < r < n + 24$; für $d = r-n$ also $0 < d < 24$, und man kann probieren, für welche $d = 1,\ldots,23$ die Gleichung $(n+d)^2 = n^2 + 24n$ eine natürliche Zahl n als Lösung hat. Da sie auf $d^2 = 2n(12 - d)$, also $d < 12$ führt, genügt es sogar, nur $d = 1,\ldots,11$ zu prüfen.

---

1) Dieser Satz kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder z.B. so bewiesen werden: Ist $\sqrt{t} = p/q$ mit (o.B.d.A.) teilerfremden natürlichen Zahlen $p,q > 0$, so folgt $tq^2 = p^2$. Da somit p Teiler von tq^2, aber teilerfremd zu q^2 ist, ist p Teiler von t, also $t = px$ mit natürlichem x. Es folgt $pxq^2 = p^2$, $xq^2 = p$. Nach der gleichen Beweisführung folgt: p ist Teiler von x, mit natürlichem y gilt $x = py$, $pyq^2 = p$, $yq^2 = 1$, also $q = 1$.

311021

Argumentation bis zum Nachweis der 1./2./3./4. Stellung
(unter Berücksichtigung jeweils nur noch neuer Argumente)
etwa aufteilbar in 4 + 3 + 2 + 1 10

311022

Vorbereitende Zusammenhänge zwischen R,r,h,p 4
Gewinnung einer Ermittlungsmöglichkeit (z.B.Formel) für V(C)... 3
Nachweis, daß V(C) nur von h abhängt 3
10

311023

Bei unterschiedlichen Möglichkeiten für Ansatz und
Textgestaltung sind zu erbringen:
Beschreibung einer Konfiguration von Geraden 4
Nachweis, daß genau 100 Geraden vorliegen 2
Nachweis, daß genau 1991 Schnittpunkte auftreten 4
10

311024

Zurückführung darauf, daß eine Gleichung, z.B. $r^2 = n^2 + 24n$,
mit natürlichen Zahlen zu erfüllen ist 4
Ermittlg.aller Lösgen.dieser Gleichg.u.damit der gesuchten t .. 4
Überprüfung, daß (1) für diese t rational ist
(ggf. in vorangehenden Textteilen mit enthalten) 2
10