31. Mathematik-Olympiade
Aufgaben

Olympiadeklasse 9
1.Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.

310931

Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als „Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, daß alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

310932

In einer Sammlung von Kuriositäten soll sich ein Gefäß mit folgender Aufschrift befunden haben:

Fünf Strich Zwei Null als Maß paßt in mich,
nach der ersten Ziffer lies „durch" für den Strich!
Oder dreh' um, Null Zwei Fünf findest du,
nach der ersten Ziffer ein Komma füg' zu!

In der Tat ist $5/20 = 0{,}25$. Gibt es noch andere Zusammenstellungen von drei Ziffern, bei denen die Vorschrift, in gleicher bzw. in umgekehrter Reihenfolge jeweils nach der ersten Ziffer den Divisionsstrich bzw. das Dezimalkomma zu schreiben, auf zwei einander gleiche Zahlenwerte führt?

310933

a) Silke behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes Dreieck ABC ist es möglich, die Fläche dieses Dreiecks durch geradlinige Schnitte in k^2 einander kongruente, zu ABC ähnliche Dreiecke zu zerlegen.

b) Hanka behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes konvexe n-Eck $A_1A_2 \cdots A_n$ $(n>3)$ ist es möglich, die Fläche dieses n-Ecks durch geradlinige Schnitte in eine Anzahl t von Teilflächen zu zerlegen, aus denen sich k^2 einander kongruente, zu $A_1A_2 \cdots A_n$ ähnliche n-Ecke zusammensetzen lassen, wobei zum Zusammensetzen jede der t Teilflächen nur einmal verwendet wird und keine übrigbleibt.

Untersuchen Sie, ob a) Silkes, b) Hankas Behauptung wahr ist!

Hinweis: Eine Fläche F heißt genau dann konvex, wenn jede Strecke, deren Endpunkte in F liegen, ganz in F liegt.

31. Mathematik-Olympiade
Aufgaben
Olympiadeklasse 9
2. Tag

310934

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D, auf der Verlängerung von CB über B hinaus ein Punkt E, und auf der Verlängerung von AC über C hinaus liege ein Punkt F. Ferner werde vorausgesetzt, daß das Dreieck DEF gleichseitig sei. Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ folgt.

310935

Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten (x;y) die Gleichung

$$|x+y| + |x-y| = 4$$

erfüllen.

310936

Für die Reihenfolge, in der sich die neun Buchstaben A,B,C,D,E,F, G,H,J von links nach rechts anordnen lassen, seien die folgenden sieben Bedingungen gefordert: Es soll

A links von B, A links von C, A links von D,
E links von F, E links von G, E links von H, E links von J

stehen. Wieviele verschiedene Reihenfolgen, bei denen diese sieben Bedingungen erfüllt sind, gibt es insgesamt?

Hinweise: In jeder der genannten Reihenfolgen soll jeder der neun Buchstaben genau einmal vorkommen.
Die Formulierung „X links von Y" schließt nicht aus, daß zwischen X und Y noch andere der Buchstaben stehen.

31. Mathematik-Olympiade

Lösungen

Olympiadeklasse 9

1.Tag

310931 Lösung: 5 Punkte

Es ist nicht möglich, die Zahlen 1,...,6 in der genannten Weise an die Ecken eines Oktaeders zu schreiben.
Beweis: Bei jeder Verteilung der Zahlen auf die Oktaederecken gilt für zwei Seitenflächen, die längs einer Kante zueinander benachbart sind (sogar für je zwei solche Seitenflächen): Sie sind Dreiecke mit zwei gemeinsamen Ecken; an diesen sind sie also mit denselben Zahlen belegt, an ihrer jeweils dritten Ecke aber mit unterschiedlichen Zahlen. Also haben sie voneinander verschiedene Flächensummen.

310932 Lösung: 7 Punkte

Der Querstrich über mehreren Zeichen[1] (Buchstaben, Ziffern, ggf. Komma) bezeichne stets eine (dekadische) Zifferndarstellung.

Wenn a,b,c Ziffern sind, mit denen die genannte Bedingung

$$a : \overline{bc} = \overline{c,ba} \qquad (1)$$

erfüllt ist, so folgt: Multiplikation von (1) mit $100\cdot\overline{bc}$ ergibt

$$\overline{a00} = \overline{bc} \cdot \overline{cba} \;, \qquad (2)$$

also ist das Produkt $c\cdot a$ der Einerziffern c,a durch 10 teilbar.

Wäre $a = 0$, so wäre nach (2) auch $\overline{bc} = 0$ im Widerspruch dazu, daß in (1) durch $\overline{bc}$ dividiert werden kann.

Wäre $a = 5$ und c eine von 0 verschiedene gerade Zahl, so folgte aus (2), daß 500 durch eine der Zahlen $\overline{2b5}$, $\overline{4b5}$, $\overline{6b5}$, $\overline{8b5}$ teilbar sein müßte, was nicht zutrifft.

Wäre $c = 5$ und a eine von 0 verschiedene gerade Zahl, so müßte eine der Zahlen 200, 400, 600, 800 durch eine Zahl der Form $\overline{5ba}$ teilbar sein, was ebenfalls nicht zutrifft.

Also verbleibt nur die Möglichkeit

$$c = 0 \;, \qquad (3)$$

und aus (2) folgt nach Division durch 10

$$\overline{a0} = b \cdot \overline{ba} \;. \qquad (4)$$

Somit ist auch $b\cdot a$ durch 10 teilbar. In (4) kann wegen $a \neq 0$ nicht $b = 0$ sein, und wäre a eine von 0 verschiedene gerade Zahl sowie $b = 5$, so wäre eine der Zahlen 20, 40, 60, 80 durch eine Zahl der Form $\overline{5a}$ teilbar. Also verbleibt nur: Es gilt

---

[1] Eine derartige „ad-hoc-Symbolik" kann akzeptiert werden, wenn der Kontext Mißverständnisse ausschließt.

$$a = 5 \ , \tag{5}$$

und b ist eine von 0 verschiedene gerade Zahl. Nun ist keines der Produkte 4·45, 6·65, 8·85 gleich 50; also muß

$$b = 2 \tag{6}$$

sein. Mit (5),(6),(3) ist gezeigt, daß die Bedingung der Aufgabenstellung durch keine andere Ziffernzusammenstellung als 5 2 0 erfüllbar ist.

<u>Bemerkung:</u> Es gibt mehrere andere Möglichkeiten, Ziffernzusammenstellungen auszuschließen, insbesondere direkt durch Probieren. [Prinzipiell genügt es ja sogar, „nur" alle 999 anderen Zusammenstellungen als 520 durchzuprobieren.] Aus der Lösungsdarstellung muß allerdings für solche Proben die tatsächliche Ausführung ersichtlich sein. [Immerhin kann hierfür auch ein Text wie der folgende akzeptabel sein: „Mit einem BASIC-programmierbaren Taschenrechner führte das Programm

```
1 FOR B=Ø TO 9: FOR C=Ø TO 9: D=1Ø*B+C: IF D=Ø GOTO 4
2 FOR A=Ø TO 9: IF A/D=C+B/1Ø+A/1ØØ THEN PRINT A;B;C
3 NEXT A
4 NEXT C: NEXT B
```

zu dem Ergebnis ... Das Programm erfaßt nämlich .." (*folgt Begründung*, hier vor allem dafür, daß durch die IF-THEN- und FOR-NEXT-Verteilung alle zu prüfenden Tripel erreicht werden).]

<u>310933 Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

a) Silkes Behauptung ist wahr. Zum Beweis ist die Existenz der in Abb.L 310933 a dargestellten Zerlegung zu begründen. Ein wesentlicher Beweisteil ist dabei zu einer Aussage folgender Art zu führen: Die gemäß der Abb. vorliegenden Parallelen zu den Dreiecksseiten verlaufen so, daß durch jeden Schnittpunkt von zwei dieser Geraden stets auch eine dritte geht.

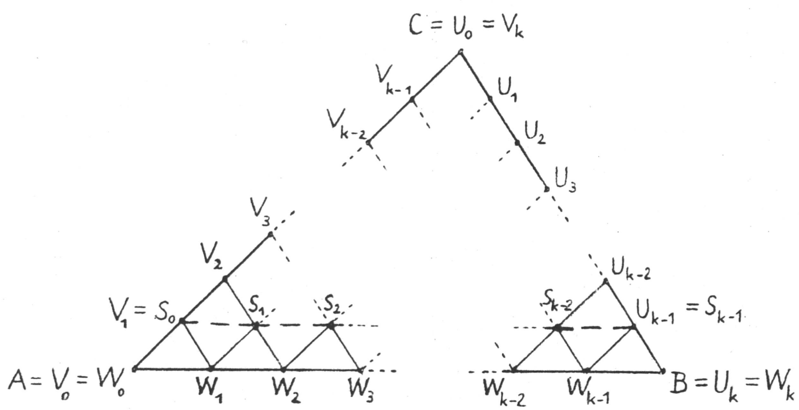


Abb.L 310933 a

1. Beweismöglichkeit: Man gewinnt eine Figur wie Abb.L 310933 a (nicht durch Zerlegen, sondern) durch Zusammensetzen:

An die Seite W_1V_1 eines Dreiecks $W_0W_1V_1$ mit denselben Innenwinkelgrößen α,β,γ, wie sie ABC hat, trägt man in W_1 bzw. V_1 Winkel der Größen γ bzw. β an. Es entsteht das nach Kongruenzsatz (wsw) zu $W_0W_1V_1$ kongruente Dreieck $S_1V_1W_1$. Ebenso kann man durch Winkelantragen Dreiecke $W_1W_2S_1$ und $V_1S_1V_2$ erhalten, und nun folgt wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$: Sowohl W_0,W_1,W_2 als auch W_0,V_1,V_2 als auch W_2,S_1,V_2 liegen auf je einer Geraden.

Durch schrittweises Fortsetzen dieses Verfahrens erhält man für jedes $k \geq 2$ ein Dreieck, das aus

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

kongruenten Dreiecken zusammengesetzt ist. Da es Innenwinkel der Größen α,β,γ hat, kann man als hierzu ähnliche Figur das in der gewünschten Weise zerlegte Dreieck ABC erhalten.

(Ausführlicher dargestellte) 2. Beweismöglichkeit:

I. Zerlegt man AC durch k-1 Punkte $V_1, \ldots, V_{k-1}$ in k gleichlange Strecken $V_0V_1, V_1V_2, \ldots, V_{k-1}V_k$ ($V_0 = A$, $V_k = C$) und ebenso CB durch k-1 Punkte $U_1, \ldots, U_{k-1}$ in k gleichlange Strecken $U_0U_1, U_1U_2, \ldots, U_{k-1}U_k$ ($U_0 = C$, $U_k = B$), so folgt aus dem Strahlensatz: Die Parallelen durch die Punkte V_i zu CB teilen AB in k gleichlange Strecken, und dasselbe gilt für die Parallelen durch die U_i zu CA; d.h., in beiden Fällen schneiden diese Parallelen die Strecke AB in denjenigen Punkten W_i, die AB in k gleichlange Strecken $W_0W_1, W_1W_2, \ldots, W_{k-1}W_k$ zerlegen ($W_0 = A$, $W_k = B$).

II. Für die Schnittpunkte S_i von W_iU_i mit $W_{i+1}V_{i+1}$ ($i = 0,\ldots,k-1$) gilt: In den k Dreiecken $W_iW_{i+1}S_i$ ist nach dem Stufenwinkelsatz $\overline{\measuredangle W_{i+1}W_iS_i} = \overline{\measuredangle BAC}$ und $\overline{\measuredangle W_iW_{i+1}S_i} = \overline{\measuredangle ABC}$. Daher und wegen der Gleichheit der $\overline{W_iW_{i+1}}$ sind diese Dreiecke zueinander kongruent (Kongruenzsatz wsw) und zu ABC ähnlich. Alle S_i haben also denselben Abstand von AB und liegen folglich auf derselben Parallelen zu AB. Ferner sind auch die k-1 Dreiecke $S_iS_{i-1}W_i$ ($i = 1,\ldots,k-1$) zu den $W_iW_{i+1}S_i$ kongruent (Wechselwinkel $\overline{\measuredangle S_{i-1}W_iS_i} = \overline{\measuredangle W_iS_iW_{i+1}}$, Kongruenzsatz sws).

III. In gleicher Weise wie bisher kann man nun der Reihe nach

für k und ABC ,
für $k-1$ und $V_1U_{k-1}C$,
... ... ,
für 2 und $V_{k-2}U_2C$

schließen. Man erhält: Ebenso wie V_1U_{k-1} gehen auch V_2U_{k-2} ,..., $V_{k-1}U_1$ durch Punkte, die bereits als Schnittpunkte der in I. genannten Parallelen zu CA, CB erhalten waren; mit diesen zusammen zerlegen sie die Dreiecksfläche ABC in einander kongruente, zu ABC ähnliche Dreiecke.

IV. Als deren Anzahl ergibt sich, z.B. in umgekehrter Reihenfolge 1,...,k wie eben in III. gebildet, die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis zu der in II. erhaltenen Anzahl $k + (k-1) = 2k - 1$, also nach bekannter Formel

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2 .$$

[Diese Anzahl k^2 kann auch damit begründet werden, daß wegen $\overline{AW_1} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AB}$ und der Ähnlichkeit jedes der (zu AW_1V_1 kongruenten) Teildreiecke als Flächeninhalt das $\frac{1}{k^2}$ - Fache des Flächeninhaltes von ABC hat.]

<u>Weitere Beweismöglichkeiten</u> sind z.B.: Man kann für ein Dreieck wie AW_2V_2 mit den Seitenmitten S_1, V_1, W_1 die Zerlegung in 4 kongruente Teildreiecke aufzeigen und dann mittels Verschiebungen (sowie unter Nutzung der ebengenannten Kongruenz) das insgesamt zerlegte Dreieck ABC erhalten.
Man kann auch zunächst ein Parallelogramm ABDC bilden und durch Parallelen zu AB und AC in kongruente Parallelogramme zerlegen. Darin zeigt man die zu BC parallelen Diagonalen auf, mit denen die gesuchte Zerlegung von ABC entsteht.

b) Auch Hankas Behauptung ist wahr. Beweis:
Man kann jede konvexe n-Ecksfläche $F = A_1A_2\cdots A_n$ durch geradlinige Schnitte in Dreiecksflächen D_1 ,..., D_m zerlegen [z.B. in die $m = n-2$ Dreiecke $A_1A_{j+1}A_{j+2}$ ($j = 1,\ldots,n-2$); denn die als Schnitte verwendeten Strecken A_1A_{j+2} ($j = 1,\ldots,n-3$) liegen ganz in F]. Jedes dieser Dreiecke D_j läßt sich nach a) durch geradlinige Schnitte in k^2 jeweils einander kongruente, zu D_j ähnliche Dreiecke zerlegen. So entstehen $t = m\cdot k^2$ dreieckige Teilflächen von F. Dann kann man k^2 mal wie folgt vorgehen: Aus jedem der m Dreiecke D_j nimmt man eine der Teilflächen heraus; diese m Teilflächen fügt man in gleicher Weise zu einem n-Eck zusammen, wie die D_j selbst zu F zusammengefügt waren. Die k^2 so gebildeten n-Ecke sind einander kongruent und zu F ähnlich. (Ein Beispiel zeigt Abb.L 310933 b.)

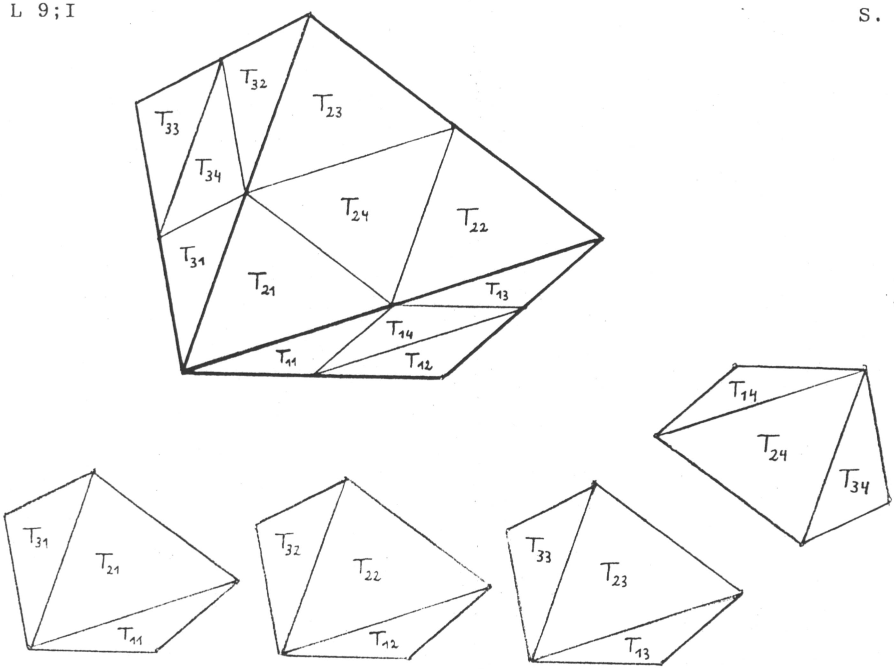


Abb.L 310933 b

<u>Bemerkungen zur Korrektur:</u> Im Unterschied zu den hier teilweise genauer dargestellten Lösungsvarianten wird man als Maßstab zur Beurteilung von Schülerlösungen ansetzen: Als hinreichend ausgeführt zu a) kann eine Darstellung eingeschätzt werden, wenn sie erkennen läßt, daß die Notwendigkeit eines wesentlichen Beweisteils eingangs genannter Art bemerkt wurde und daß ein Beweisweg verfolgt wurde, auf dem ein solcher Nachweis z.B. schrittweise zum Ziel führt. Formulierungen wie oben in III. („In gleicher Weise wie ... der Reihe nach für ..."), die ein genaueres Ausführen umgehen, können dann akzeptiert werden. - Ähnliches gilt zu der Frage, wie weit in b) das abschließende Zusammensetzen von Teilflächen beschrieben werden sollte.

31. Mathematik-Olympiade
Hinweise zur Korrektur, Vorschläge zur Punktverteilung

Olympiadeklasse 9
1.Tag

Für jede Aufgabe ist die zum Lösungstext genannte Gesamtpunktzahl beizubehalten, während die unten skizzierte weitere Aufteilung im Sinn eines Vorschlags gegeben wird und als Grundlage zur individuellen Einschätzung der vom Schüler erbrachten *Bestandteile* <u>eines</u> *zum Ziel führenden* Lösungsweges dient („additive Punktvergabe", auch bei insgesamt unvollständiger Lösung und ohne Festlegung auf einen bestimmten Lösungsweg. „Erbracht" heißt „im Text *ersichtlich*", nicht nur hinein-interpretiert.)
Die hier gegebenen Lösungstexte selbst sind als Angabe derartiger Bestandteile eines möglichen vollständigen Lösungsweges konzipiert; sie sind *nicht etwa „Musterlösungen"*, die in angegebener Formulierung vom Schüler zu erwarten wären. So sollen z.B. „übertrieben genaue" Formulierungen auf Lösungsteile hinweisen, die in verschiedenartigen schülergemäßen Fassungen erbracht werden können, aber jedenfalls (bei Wahl dieses Lösungsweges) nicht fehlen dürfen. Gelegentlich enthält der Lösungstext auch - in Gestalt von Fußnoten, „Hinweisen", „Bemerkungen" oder in Klammern gesetzten Texteinschüben - Angaben, die zu einem vollständigen Lösungsweg nicht erforderlich sind.
Das *Zitieren* eines ohne Beweis benutzten mathematischen Sachverhaltes ist als ausreichender Teilschritt (anteilig) zu werten, wenn es mit üblicher oder genügend deutlicher Kennzeichnung geschieht (z.B. „Thalessatz", „Winkelsumme im Viereck") oder durch inhaltliche Angabe erfolgt (z.B. Voraussetzung und Behauptung eines Satzes). Im Sinne einer Grenzfall-Problematik ist bei Auftreten der Frage zu handeln, ob ein Zitat nicht akzeptabel sei, da laut Aufgabentext ein Beweis(schritt) als *gefordert* anzusehen sei. Ähnliches gilt zur Frage der Anerkennung *anschaulicher* Beweismittel und zum Akzeptieren altersgerechter Beweislücken. Beispiel: Zwar möglicherweise Verzicht auf *Beweis zu* (bzw. Herleitung aus) geometrischen *Lageaussagen*; aber Forderung nach *Berücksichtigung* aller Lagemöglichkeiten.

<u>Punktverteilungsvorschläge:</u>

<u>310931</u>

Ersichtliche Behandlung einer Aussage über *alle* Belegungen	2
Dort:Existenznachweis zweier verschiedener Flächensummen	3
	5

<u>310932</u>

Eindeutigkeitsnachweis für die Ziffern a,b,c, aufgeteilt etwa:

Ziffer mit größtem/mittlerem/kleinstem Aufwand	4+2+1
	7

<u>310933</u>

a) Ersichtliches Auffinden der Zerlegungsfigur, Anzahl k^2	2
Ausreichendes Behandeln der Schnittpunkteigenschaft	2
b) Gewinnung von t Teilflächen	2
Zusammensetzung zu k^2 geforderten n-Ecken	2
	8

31. Mathematik-Olympiade
Lösungen

Olympiadeklasse 9
2.Tag

310934 Lösung: 7 Punkte

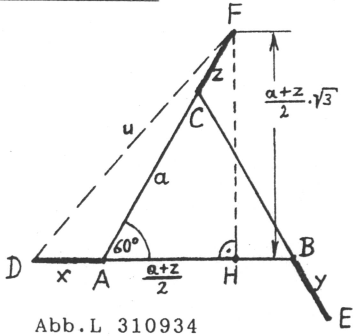


Abb.L 310934

Für die Längen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$, $\overline{AD} = x$, $\overline{BE} = y$, $\overline{CF} = z$ und $\overline{DF} = u$ gilt: Ist H der Fußpunkt des Lotes von F auf die Gerade durch A,B, so ist $\overline{\measuredangle AHF} = 90°$ und $\overline{\measuredangle HAF} = \overline{\measuredangle BAC} = 60°$, also sind $\overline{AH}$ bzw. $\overline{HF}$ gleich der halben Seitenlänge bzw. gleich der Höhenlänge in einem gleichseitigen Dreieck, in dem $\overline{AF} = a+z$ Seitenlänge ist;

d.h., es gilt $\overline{AH} = \frac{a+z}{2}$, $\overline{HF} = \frac{a+z}{2}\cdot\sqrt{3}$.

Daraus folgt
$$u^2 = \left(x + \frac{a+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+z}{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2$$
$$= x^2 + x(a+z) + (a+z)^2 . \qquad (1)$$

Entsprechend gilt wegen der Voraussetzung $\overline{DF} = \overline{FE} = \overline{ED}$ auch
$$u^2 = z^2 + z(a+y) + (a+y)^2 , \qquad (2)$$
$$u^2 = y^2 + y(a+x) + (a+x)^2 . \qquad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt
$$x^2 + ax + xz + a^2 + 2az + z^2 = z^2 + az + yz + a^2 + 2ay + y^2 ,$$
$$ax - ay + x^2 - y^2 + xz - yz = ay - az ,$$
$$(x-y)(a+x+y+z) = a(y-z) . \qquad (4)$$

Aus (2) und (3) folgt entsprechend
$$(z-x)(a+x+y+z) = a(x-y) . \qquad (5)$$

Nun sind a und a+x+y+z positiv. Daher führt die Annahme $x > y$ nach (4) auf $y > z$, nach (5) aber auf $z > x$, womit ein Widerspruch ($x > y > z > x$) erreicht ist. Ebenso führt die Annahme $x < y$ auf $y < z$ und $z < x$, also einen Widerspruch. Daher muß $x = y$ gelten. Entsprechend folgt $y = z$.

Hinweis zu anderen Lösungsmöglichkeiten: Es könnte naheliegend erscheinen, zunächst die Umkehrung des zu beweisenden Satzes zu betrachten und daraus Motive für einen geforderten Beweis zu entnehmen. Diese Umkehrung, der Schluß von (der Gleichseitigkeit des Dreiecks ABC und) $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ auf die Gleichseitigkeit des Dreiecks DEF, ist leicht vermittels Δ DBE $\cong$ Δ ECF $\cong$ Δ FAD zu beweisen. Man könnte nun einen indirekten Beweis derart versuchen, daß man ausgehend von „einer solchen Figur" mit gleichseitigem DEF und von der Annahme, statt „des obigen" D sei D' ein Punkt auf der Verlängerung von BA mit $\overline{AD'} \neq \overline{AD}$, das Dreieck D'EF als nicht gleichseitig erweist. In dieser Form ist das Vorgehen aber fehlerhaft: Vorauszusetzen ist DEF nicht als „das obige", sondern nur als *ein* - also möglicherweise ein anderes - gleichseitiges Dreieck. Oder, in anderer Beschreibung des Fehlers: Der oben an die Annahme $\overline{AD'} \neq \overline{AD}$ geknüpfte Schluß über D'EF verwendet unverändert auch die Punkte E und F.

Freilich ist auch eine korrekte Nutzung derartiger Motive möglich, z.B.so: Man ermittelt zunächst, zu $a = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ *und zu jeweils einem* $u = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$ *zugehörig*, eine Streckenlänge s, mit der sich drei Punkte D', E', F' so finden lassen, daß bei *einheitlichem* $\overline{AD'} = \overline{BE'} = \overline{CF'} = s$ das Dreieck D'E'F' gleichseitig *mit der Seitenlänge* u wird. Anstelle von (1),(2),(3) ist eine Gleichung $u^2 = s^2 + s(a+s) + (a+s)^2$ zu erfüllen. Man stellt fest, daß sie genau eine positive Lösung s hat. Wäre nun $x = \overline{AD} > s$, so wären DAF und D'AF' zwei Dreiecke mit gleichem stumpfem Winkel bei A und gleichlangen Gegenseiten $\overline{DF} = \overline{D'F'} = u$; aus $\overline{AD} > \overline{AD'}$ ergäbe sich $z = \overline{AF} < s$ Durch Vergleich von DBE und D'BE' folgte ebenso $y = \overline{BE} < s$. Damit aber hätte FCE gleichen Winkel bei C wie F'CE' und kleinere anliegende Seiten; d.h., es folgte der Widerspruch $\overline{EF} < u$. Entsprechend führte $x < s$ auf den Widerspruch $\overline{EF} > u$. Also verbleibt nur die Möglichkeit $x = s$; ebenso folgen $y = s$, $z = s$ und damit $x = y = z$.

310935 Lösung: 7 Punkte

Für jeden Punkt der Ebene liegt genau einer der folgenden Fälle vor:
- I. Es gilt $y \geq x$ und $y \geq -x$ (Abb.L 310935 a).
- II. Es gilt $y \geq x$ und $y < -x$ (Abb.L 310935 b).
- III. Es gilt $y < x$ und $y \geq -x$ (Abb.L 310935 c).
- IV. Es gilt $y < x$ und $y < -x$ (Abb.L 310935 d).

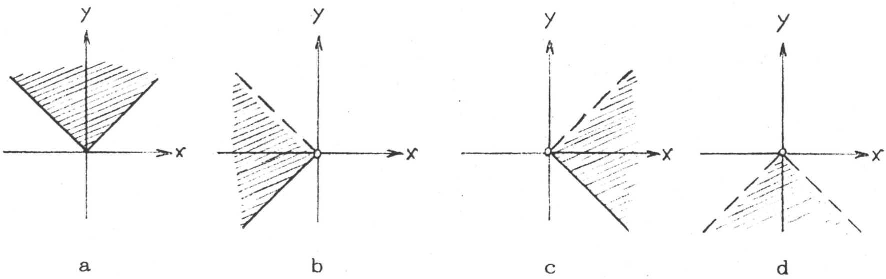


Abb.L 310935

Im Fall I gilt $x+y \geq 0$, also $|x+y| = x+y$,
und $x-y \leq 0$, also $|x-y| = -(x-y) = -x+y$;
daher ist die zu erfüllende Gleichung

$$|x+y| + |x-y| = 4 \qquad (1)$$

gleichbedeutend mit $x + y - x + y = 4$, d.h. mit $y = 2$. Unter den in Abb.L. 310935 a hervorgehobenen Punkten erfüllen also genau diejenigen auch (1), die der Geraden mit der Gleichung $y = 2$ angehören (Abb.L 310935 e, Strecke CD).

Entsprechend hat man im Fall II:

$x+y < 0$, also $|x+y| = -(x+y) = -x-y$

und $x-y \leq 0$, also $|x-y| = -(x-y) = -x+y$,

also (1) gleichbedeutend mit

$$-x-y-x+y = 4 \text{ , d.h. mit } x = -2$$

(Strecke AD ohne Punkt D).

Fall III: $x+y \geq 0$, also $|x+y| = x+y$,

$x-y > 0$, also $|x-y| = x-y$;

(1) gleichbedeutend mit $x+y+x-y = 4$, d.h. mit $x = 2$

(Strecke BC ohne Punkt C).

Fall IV: $x+y < 0$, also $|x+y| = -(x+y) = -x-y$,

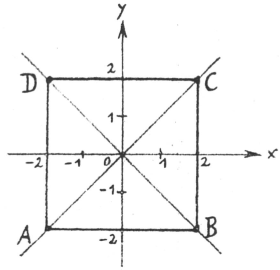
$x-y > 0$, also $|x-y| = x-y$;

(1) gleichbedeutend mit $-x-y+x-y = 4$, d.h. mit $y = -2$

(Strecke AB ohne A und B).

Die insgesamt zu zeichnenden Punkte sind somit genau die (Rand-) Punkte des Quadrats ABCD (Abb.L 310935 e), dessen Eckpunkte A,B, C,D die Koordinaten (-2;-2), (2;-2), (2;2) bzw. (-2;2) haben.

Abb.L 310935 e



<u>Hinweise:</u> Die Fallunterscheidung muß vollständig, braucht aber nicht disjunkt zu sein (Einbeziehung der Gleichheit in II.,III., IV. ist möglich).
Ein anschaulicher Zwischenschritt wie hier die Nutzung der Abbildungen L.310935 a - d kann akzeptiert werden. Wird nur rechnerisch vorgegangen, so werden solche zusätzlichen Abbildungen natürlich nicht verlangt.

<u>310936 Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Es gibt bekanntlich insgesamt $\frac{9!}{4!\cdot 5!}$ verschiedene Reihenfolgen für die Anordnung von neun Symbolen a,a,a,a,e,e,e,e,e. Aus jeder dieser Reihenfolgen entsteht genau dann eine der im Aufgabentext beschriebenen Reihenfolgen, wenn man das am weitesten links stehende Symbol a durch A und die drei weiteren Symbole a in beliebiger Reihenfolge durch B,C,D ersetzt (hierfür gibt es bekanntlich genau 3! Möglichkeiten) und wenn man unabhängig davon das am weitesten links stehende Symbol e durch E und die vier weiteren Symbole e in beliebiger Reihenfolge durch F,G,H,J ersetzt (hierfür gibt es genau 4! Möglichkeiten). Da man auf diese Weise jede der zu betrachtenden Reihenfolgen von A,B,C,D,E,F,G,H,J genau einmal erhält, beträgt deren Anzahl folglich

$$\frac{9!}{4!\cdot 5!}\cdot 3!\cdot 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 18144 .$$

31. Mathematik-Olympiade
Vorschläge zur Punktverteilung
Olympiadeklasse 9
2.Tag

310934

Herleitung nutzbarer Beziehungen [z.B. zwischen x,y,z oder für zuvor zu a,u definiertes s]	3
Weitere Schlußfolgerung [z.B nutzbare Beziehung wie (4) oder Lösung der Geichung für s]	2
Abschließende Herleitung von x = y = z	2
	7

310935

Zweckmäßige Fallunterscheidung	2
Herleitung der Teil-Punktmengen in den Fällen	2
Zeichnung und ergänzende Textbeschreibung	3
	7

310936

Vorbereitende Ermittlung (z.B. der Permutationen-anzahl von a,a,a,a,e,e,e,e,e)	3
Abschließende Ermittlung der gesuchten Anzahl	3
	6