310921

a) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, für die (im dekadischen Positionssystem) die Bedingung erfüllt ist, daß sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme von n+1 durch 10 teilbar sind! Überprüfen Sie, daß die von Ihnen angegebene Zahl diese Bedingung erfüllt!

b) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die die in a) genannte Bedingung erfüllt! Beweisen Sie für die von Ihnen angegebene Zahl, daß es sich um die kleinste Zahl mit dieser Bedingung handelt!

310922

Gegeben seien zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte A und B. Konstruieren Sie nur mit dem Zirkel einen von A und B verschiedenen Punkt C, für den ∡ ABC ein rechter Winkel ist!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie: Wenn ein Punkt C nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, dann ist ∡ ABC ein rechter Winkel!

Hinweis: Man sagt, eine Konstruktion sei „nur mit dem Zirkel" ausgeführt, wenn jeder Konstruktionsschritt darin besteht, daß um einen Punkt M ein Kreis konstruiert wird, dessen Radius gleich dem Abstand zweier Punkte P , Q ist (für die auch M = P oder M = Q sein darf), wobei die Punkte M , P , Q entweder gegebene oder be- beliebig gewählte oder zuvor konstruierte Punkte sind. Als „nur mit dem Zirkel konstruiert" gilt dann jeder Punkt, der als gemeinsamer Punkt von (mindestens) zwei solchen Kreisen zu erhalten ist.

310923

Wenn bei der Abbildung eines Körpers in Zweitafelprojektion die Grund- und Aufrißbilder nicht für eine eindeutige Festlegung ausreichen, kann man einen Seitenriß hinzufügen und damit zur Dreitafelprojektion übergehen.
Die Abbildung A 310923 zeigt zwei Rechtecke (mit gegebenen Seitenlängen a,b) als Grund- und Aufriß eines Körpers. (Es wird nicht gefordert, daß der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt wird.)
Ergänzen Sie die Risse in drei verschiedenen Zeichnungen so durch Seitenrisse, daß die Bilder von drei Körpern entstehen, von denen keine zwei das gleiche Volumen haben! Bezeichnen Sie in Ihren Darstellungen alle an den Körpern auftretenden Ecken! (Grund-, Auf-, und Seitenriß eines Punktes P bezeichne man mit P' , P'' bzw. P''' ; eventuell auftretende Kanten, die von Flächen verdeckt sind, zeichne man gestrichelt.) Geben Sie in Abhängigkeit von a und b die Volumina der drei dargestellten Körper an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

310924

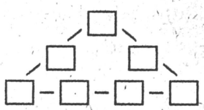


Abb. A 310924

In die Felder der Abbildung A 310924 sollen die Zahlen 1,2,3,4,5,6,7 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt und daß die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben. Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

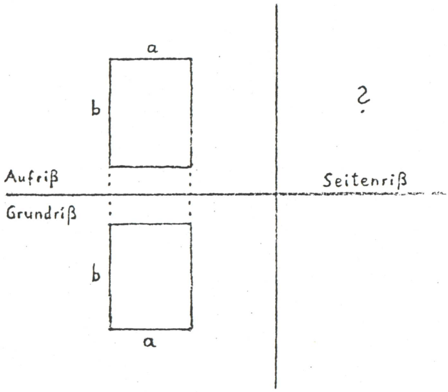


Abb. A 310923

310921 Lösung: 10 Punkte

a) Ein Beispiel ist etwa n = 6769999999999999999999 ; denn die Quersumme von n ist 190, und die Quersumme von n + 1 = 6770000000000000000000 ist 20.

b) Die in a) genannte Bedingung kann nur von natürlichen Zahlen n erfüllt werden, deren dekadische Zifferndarstellung auf mindestens eine Ziffer 9 endet; denn für jede andere natürliche Zahl n unterscheiden sich die Quersummen von n und von n+1 um genau 1, so daß nicht beide durch 10 teilbar sein können.
Wenn nun die Zifferndarstellung von n

$$\left.\begin{array}{l}\text{auf genau } k \geq 1 \text{ Ziffern 9 endet}\\ \text{und davor noch genau } h \text{ Ziffern enthält}\end{array}\right\} \qquad (1)$$

(mit $h \geq 1$, sonst hätte n+1 die Quersumme 1), so gilt: Ist s die Summe dieser h Ziffern, so hat n die Quersumme $s + 9 \cdot k$, und n+1 hat die Quersumme s+1. Diese ist genau dann durch 10 teilbar, wenn

$$s = 10p-1 \qquad (2)$$

mit einer ganzen Zahl p ist. Trifft das zu, so hat n die Quersumme $10p-1 + 9 \cdot k = 10(p+k)-(k+1)$, also genau dann ebenfalls eine durch 10 teilbare Quersumme, wenn k+1 durch 10 teilbar ist, d.h. auch k mit einer ganzen Zahl q von der Form

$$k = 10q-1 \qquad (3)$$

ist.

Die Anzahl h+k der Ziffern (einer Zahl n, die (1),(2),(3) erfüllt) ist genau dann am kleinsten, wenn (3) mit der kleinstmöglichen Zahl k = 9 zutrifft und (2) durch die Summe s einer möglichst kleinen Anzahl h von Ziffern erfüllt wird. Dabei scheidet noch der Fall h = 1 aus, da er nach (2) nur mit einer Ziffer 9 vorkommen könnte, diese aber nach (1) als (einzige, also letzte) der h Ziffern auszuschließen ist.
Also muß die gesuchte kleinste Zahl n sich für h = 2 und k = 9 unter den durch (1),(2),(3) beschriebenen Zahlen befinden. Die kleinste unter ihnen ist die mit der kleinstmöglichen Anfangsziffer 1, auf die wegen (2) als zweite Ziffer eine 8 folgt.

Damit ist nachgewiesen: Die kleinste natürliche Zahl, die die in a) gestellte Bedingung erfüllt, ist 18999999999 .

310922 Lösung: 9 Punkte

Abb. L 310922 zeigt eine mögliche Konstruktion. Beschreibung:

(1) Man konstruiert den Kreis k_1 um A mit dem Abstand zwischen A und B als Radius r.

(2) Man konstruiert den Kreis k_2 um B mit demselben Radius r und wählt als D einen der beiden Schnittpunkte von k_1 und k_2 .

(3) Man konstruiert den Kreis k_3 um D mit r. Er schneidet den Kreis k_2 in A und einem weiteren Punkt E.

(4) Man konstruiert den Kreis k_4 um E mit r. Er schneidet den Kreis k_3 in B und einem weiteren Punkt C.

Beweis, daß $\overline{\sphericalangle ABC} = 90^\circ$ gilt: Nach (1) und (2) ist

$$\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BD} , \qquad (5)$$

nach (2) und (3) ist $\overline{BD} = \overline{BE} = \overline{DE}$, (6)

nach (3) und (4) ist $\overline{DE} = \overline{DC} = \overline{EC}$. (7)

Aus (5) und (6) folgt: ABED ist ein Parallelogramm, also gilt

$$AB \parallel DE \ . \qquad (8)$$

Aus (6) und (7) folgt: Sowohl B als auch C haben gleiche Entfernungen zu D und E, liegen also auf der Mittelsenkrechten von DE ; somit gilt

$$BC \perp DE \ . \qquad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt $AB \perp BC$, w.z.b.w.

<u>Andere Fortsetzung</u> nach (5),(6),(7): Die Dreiecke ABD, BDE und DEC sind gleichseitig. Also ist $\overline{\measuredangle ADC} = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$; d.h., D liegt auf AC. Daher sind $\measuredangle BAD = \measuredangle BAC$ und $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA$ Innenwinkel auch im Dreieck ABC. (Dieser Beweisschritt darf hier nicht fehlen[1].) Aus (5),(6),(7) folgt ferner $\Delta BDC \cong \Delta BEC$, also halbiert CB den Winkel $\measuredangle DCE$. Da somit $\overline{\measuredangle BAC} = 60^\circ$, $\overline{\measuredangle BCA} = 30^\circ$ gezeigt sind, folgt nach dem Innenwinkelsatz $\overline{\measuredangle ABC} = 90^\circ$.

<u>310923 Lösung:</u> 12 Punkte

Es genügt, drei Beispiele etwa der folgenden Art auszuführen (dabei von <u>c</u>, <u>d</u> höchstens eines). Die zusätzlich zu den Volumenformeln beigefügten Erläuterungen werden nicht vom Schüler verlangt.

<u>Abb. L 310923 a</u> zeigt den Grund-, Auf- und Seitenriß eines Quaders mit den Seitenlängen a,b,b. Sein Volumen beträgt $V_1 = ab^2$.

<u>Abb. L 310923 b</u> zeigt entsprechend ein gerades Prisma, bei dem man ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Kathetenlänge b als Grundfläche auffassen kann; die darauf senkrechte Höhe hat die Länge a. Das Volumen des Prismas beträgt $V_2 = \frac{1}{2}\, ab^2$.

<u>Abb. L 310923 c</u> zeigt einen geraden Kreiszylinder, bei dem als Grundfläche ein Kreis mit dem Radius $\frac{b}{2}$ auftritt und die zugehörige Höhenlänge a beträgt. Das Volumen ist $V_3 = \frac{\pi}{4}\, ab^2$.

<u>Abb. L 310923 d,e,f</u> zeigen entsprechend gerade Zylinder, bei denen jeweils die im Seitenriß sichtbare Fläche als Grundfläche auftritt. Deren Flächeninhalt F_i bzw. das Zylindervolumen V_i ist jeweils

bei <u>d):</u> $F_4 = \frac{\pi}{4}\, b^2$, $V_4 = \frac{\pi}{4}\, ab^2$;

bei <u>e):</u> $F_5 = b^2 - \frac{\pi}{4}\, b^2$, $V_5 = \frac{1}{4}\,(4 - \pi)\, ab^2$;

bei <u>f):</u> $F_6 = b^2 - 2\cdot(b^2 - \frac{\pi}{4}\, b^2)$, $V_6 = \frac{1}{2}\,(\pi - 2)\, ab^2$.

---

[1] Ein solcher Beweisschritt darf z.B. ebenfalls nicht fehlen, wenn eine Beweisdarstellung gewählt wird, bei der aus $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$ nach dem Thalessatz auf $\overline{\measuredangle ABC} = 90^\circ$ geschlossen wird.

310924 Lösung: 9 Punkte

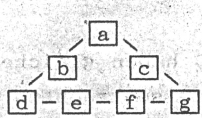


Abb. L 310924 a

Wenn eine Eintragung die geforderten Bedingungen erfüllt, so sind die in die Felder (Abb. L 310924 a) eingetragenen Zahlen a,...,g die Zahlen 1,...,7 in einer Reihenfolge, für die mit einer Zahl s die Gleichungen

$$a + b + d = s\,,$$
$$a + c + g = s\,,$$
$$d + e + f + g = s$$

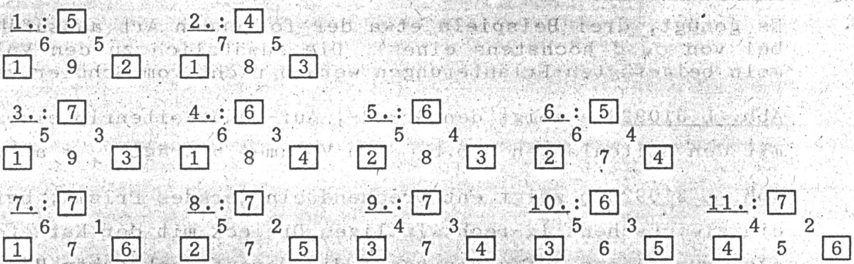
gelten. Nach Addition dieser Gleichungen folgt wegen $1+...+7 = 28$

$$a + d + g + 28 = 3s\,, \qquad (1)$$

also ist $a + d + g + 28$ durch 3 teilbar; folglich läßt $a + d + g$ bei Division durch 3 den Rest 2. Daher sind für $a + d + g$ nur folgende Darstellungen (mit geeigneter Reihenfolge der Summanden) möglich, jeweils mit dem nach (1) dazugehörigen Wert s:

$8 = 1+2+5 = 1+3+4$ mit $s = 12$,
$11 = 1+3+7 = 1+4+6 = 2+3+6 = 2+4+5$ mit $s = 13$,
$14 = 1+6+7 = 2+5+7 = 3+4+7 = 3+5+6$ mit $s = 14$,
$17 = 4+6+7$ mit $s = 15$.

In den nachfolgenden dreieckigen Zusammenstellungen sind zwischen je zwei Eckzahlen die Ergänzungen zu s gesetzt:



Nun ist in jeder dieser Zusammenstellungen zu untersuchen, ob sich eine der gesuchten Eintragungen ergibt, indem man auf genau einer Dreiecksseite die mittlere Zahl in zwei Summanden zerlegt. Die Zusammenstellungen 1., 3., 4. führen dabei zu dem Widerspruch, daß diejenige Zahl zerlegt werden müßte, die größer als 7 ist, wonach zwei gleiche Zahlen auftreten würden. Ferner führen 7., 8., 9. und 10. auf einen Widerspruch, da bei ihnen zwei verschiedene Zahlen doppelt vorkommen, von denen nur eine zerlegt werden könnte. Also können nur die Eintragungen in Abb. L 310924 b den Forderungen genügen.

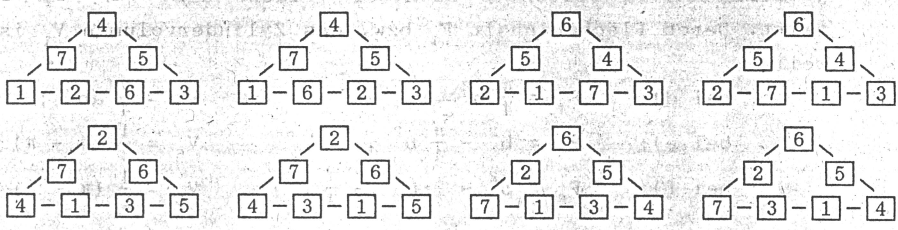


Abb. L 310924 b

Man bestätigt, daß sie diese Forderungen erfüllen und daß auch keine zwei von ihnen durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

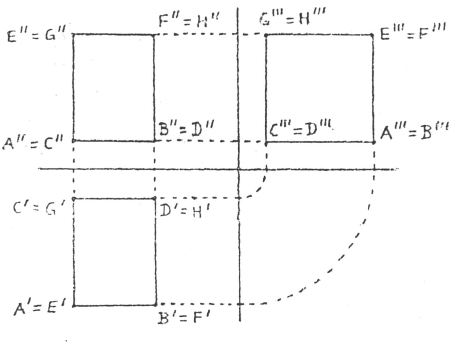


Abb. L 310923 a

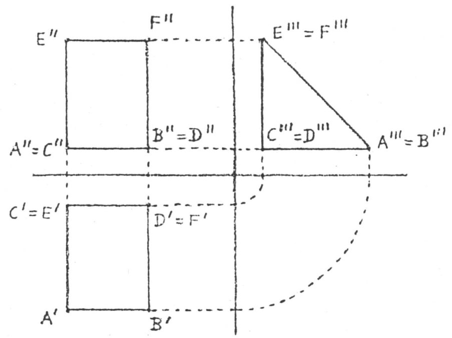


Abb. L 310923 b

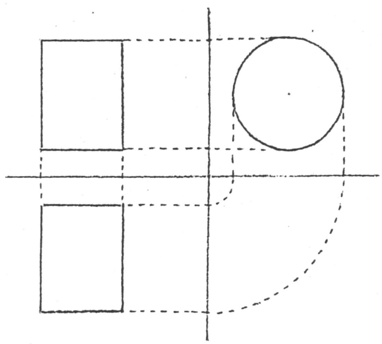


Abb. L 310923 c

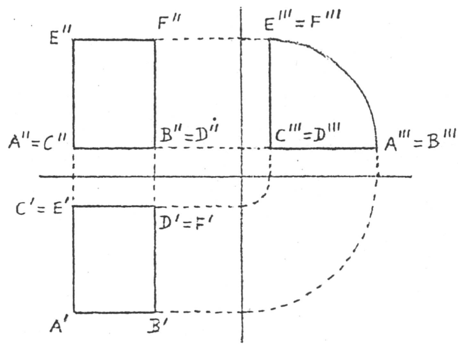


Abb. L 310923 d

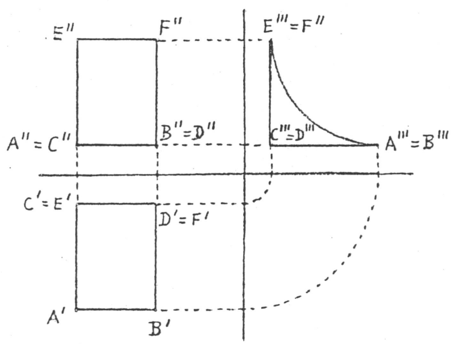


Abb. L 310923 e

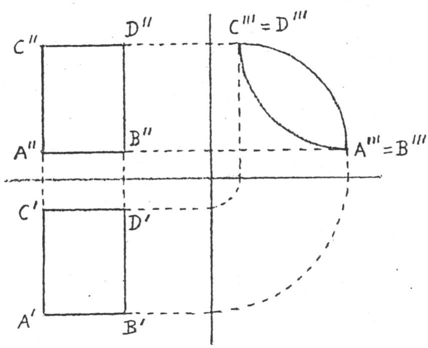


Abb. L 310923 f

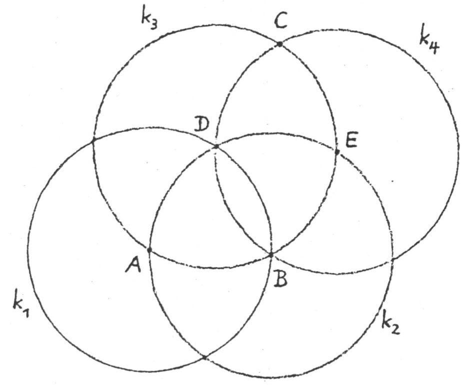


Abb. L 310922

310921
a) Angabe und Überprüfumg für ein Beispiel 3
b) Zur Ermittlung der gesuchten kleinsten Zahl sind (auch bei unterschiedlichem Beweisaufbau) Schlüsse zu erbringen, die etwa mit folgenden Teilschritten vergleichbar sind:
   Schluß auf 10|(k+1) für die Anzahl k der Endziffern 9 3
   Schluß auf 10|(s+1) für die Summe s der Zifffern davor ... 2
   Nutzung der Minimalität: k = 9 ; davor Ziffern 1 und 8 ... 2
   10

310922
Konstruktion 3
Beschreibung 3
Beweis 3
9

310923
Für jeden der drei Körper bei größerem/kleinerem Aufwand:
   Zeichnung (mit Seitenriß und Eckenangabe) ... 3 / 2
   Volumenformel .... 2 / 1
Damit zu erreichende Punktverteilung
   lung auf die drei Körper z.B. .... 5 + 4 + 3 = ... 12

310924
Nach erstem Aussortieren verbleibende Fälle von Eckenbelegungen 1. bis 11. (oder vergleichbarer Zwischenschritt) 5
Abschließende Ermittlung der acht Lösungen 4
9