31. Mathematik-Olympiade

Aufgaben

Olympiadeklasse 8

1.Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.

310831

Eine Schachtel B ist mit blauen Kugeln gefüllt, eine andere Schachtel R mit roten Kugeln. Die Anzahl der roten Kugeln beträgt $\frac{15}{17}$ der Anzahl der blauen Kugeln. Aus der Schachtel B kann man $\frac{2}{5}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie immer noch mehr als 1000 Kugeln. Aus der Schachtel R kann man $\frac{3}{7}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie weniger als 1000 Kugeln.

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahlen der Kugeln eindeutig bestimmt sind, die ursprünglich in den Schachteln waren! Wenn das der Fall ist, nenne diese beiden Anzahlen!

310832

Sechs Spieler trugen ein Schachturnier aus, in dem jeder Spieler gegen jeden anderen genau eine Partie spielte. Wie üblich gab es bei einem unentschiedenen Spiel für jeden der beiden Spieler einen halben Punkt und sonst für den Gewinner 1 Punkt, für den Verlierer 0 Punkte. Nach dem Abschluß des Turniers machte ein Beobachter die Feststellung, daß keine zwei der sechs Spieler die gleiche Punktzahl erreicht hatten.

Gesucht ist die größtmögliche Punktzahl, die in einem solchen Turnier für den Letztplazierten (d.h. für den Spieler mit der niedrigsten Punktzahl) erreichbar ist. Nenne diese Zahl und beweise,

a) daß für den Letztplazierten keine größere Punktzahl möglich ist, wenn nur vorausgesetzt wird, daß die Feststellung des Beobachters zutrifft!

b) Zeige ferner - z.B. mit einer möglichen Ergebnistabelle der einzelnen Spiele -, daß es Ergebnisse geben kann, bei denen (die Feststellung des Beobachters zutrifft und) der Letztplazierte die von dir genannte Punktzahl wirklich erreicht!

310833

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Auf der Seite BC dieses Dreiecks seien ferner ein Punkt D zwischen B und C sowie ein Punkt E zwischen D und C gegeben. Gesucht sind zwei Punkte F,G, mit denen die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) F liegt auf AC.
(2) G liegt auf AB.
(3) DEFG ist ein Parallelogramm.

a) Beweise, daß für jedes Dreieck ABC mit Punkten D,E in beschriebener Lage gilt: Wenn zwei Punkte F,G die Bedingungen (1),(2),(3) erfüllen, dann können sie (aus den gegebenen A,B,C,D,E) konstruiert werden;

b) beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, daß auch umgekehrt F und G, wenn sie nach deiner Beschreibung konstruiert werden, die Bedingungen (1),(2),(3) erfüllen!

d) Wähle A,B,C,D,E wie genannt und führe die von dir beschriebene Konstruktion durch!

31. Mathematik-Olympiade
Aufgaben
Olympiadeklasse 8
2.Tag

310834

Untersuche für alle rationalen Zahlen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$, ob bzw. unter welchen Bedingungen das Produkt der Zahlen a,b kleiner als die Summe, gleich der Summe oder größer als die Summe von a und b ist!

310835

Es sei ABCDEF ein gerades dreiseitiges Prisma mit $AD \parallel BE \parallel CF$. Die Deckfläche DEF sei ein rechtwinkliges Dreieck mit E als Scheitel des rechten Winkels. Weiterhin sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{SB} < \overline{SA}$ folgt!

310836

Von einem Dreieck ABC sind gegeben:
Die Seitenlänge $a = \overline{BC} = 845$ cm, die Länge $h_a = \overline{AE} = 840$ cm der auf BC senkrechten Höhe und die Länge $h_c = \overline{CD} = 780$ cm der auf AB senkrechten Höhe.

Berechne für jedes Dreieck ABC, bei dem diese Längen auftreten, die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{AC}$!

31. Mathematik-Olympiade
Lösungen
Olympiadeklasse 8
1.Tag

310831 Lösung: 7 Punkte

Für die Anzahlen b bzw. r der blauen bzw. roten Kugeln gilt $r = \frac{15b}{17}$, also ist 15b durch 17 teilbar. Da 15 zu 17 teilerfremd ist, ist folglich auch b durch 17 teilbar; d.h., es gilt

$$b = 17n$$

mit einer natürlichen Zahl n. Damit folgt weiter

$$r = \frac{15 \cdot 17n}{17} = 15n .$$

Da $\frac{2b}{5}$ als (aus B entnehmbare) Anzahl vorausgesetzt wird, ist 2b durch 5 teilbar; wegen $2b = 2 \cdot 17n$ und der Teilerfremdheit von $2 \cdot 17$ zu 5 ist somit n durch 5 teilbar; d.h., mit einer natürlichen Zahl m gilt $n = 5m$, also

$$b = 17 \cdot 5m , \qquad r = 15 \cdot 5m .$$

Ebenso folgt aus der Voraussetzung von $\frac{3r}{7}$ als Anzahl sowie aus $3r = 3 \cdot 15 \cdot 5m$, daß m durch 7 teilbar ist. Mit einer natürlichen Zahl k gilt somit $m = 7k$,

$$b = 17 \cdot 5 \cdot 7k , \qquad r = 15 \cdot 5 \cdot 7k .$$

In B bzw. R befinden sich nach dem Herausnehmen von $\frac{2}{5}b$ bzw. von $\frac{3}{7}r$ noch $\frac{3}{5}b = 3 \cdot 17 \cdot 7k = 357k$ Kugeln bzw. noch $\frac{4}{7}r = 4 \cdot 15 \cdot 5k = 300k$ Kugeln. Für diese Anzahlen gilt nach Voraussetzung

$$357k > 1000 , \qquad 300k < 1000 ,$$

$$k > \frac{1000}{357} > 2 , \qquad k < \frac{1000}{300} < 4 .$$

Damit ist eindeutig bestimmt: Es gilt $k = 3$,

$$b = 17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1785 , \quad r = 15 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1575 .$$

310832 Lösung: 6 Punkte

Die größtmögliche für den Letztplazierten erreichbare Punktzahl beträgt 1 . Beweis:

a) Hätte der Letztplazierte 1,5 Punkte oder mehr erreichen können, so wären nach der Feststellung des Beobachters für die anderen Spieler der Reihe nach mindestens 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 Punkte erreichbar. Damit müßten in dem Turnier insgesamt mindestens 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4 = 16,5 Punkte zu vergeben sein. Da aber jeder der 6 Spieler gegen 5 andere spielte und da in dem Produkt $6 \cdot 5 = 30$ jede Partie zweimal erfaßt ist, waren insgesamt nur 30:2 = 15 Partien zu spielen und folglich auch nur 15 Punkte zu vergeben. Dieser Widerspruch beweist, daß eine größere Punktzahl als 1 für den Letztplazierten nicht möglich ist.

b) Ein Beispiel für Ergebnisse der einzelnen Spiele mit der Punktzahl 1 für den Letztplazierten zeigt die Tabelle

	A	B	C	D	E	F	Punktzahl
A	-	1	1	1	1	1	5
B	0	-	1	1	1	0	3
C	0	0	-	1	0,5	1	2,5
D	0	0	0	-	1	1	2
E	0	0	0,5	0	-	1	1,5
F	0	1	0	0	0	-	1

Bemerkungen: Die Partienzahl 15 kann auch anhand einer Tabelle (z.B. als Zahl der Kästchen oberhalb der Hauptdiagonale oder als Summe $5 + 4 + 3 + 2 + 1$) abgelesen werden. Die Annahme einer Punktzahl $\geq 1{,}5$ für F kann auch (ohne Ermittlung der Partienzahl) so widerlegt werden: Wären die Zeilensummen einer Tabelle ≥ 4; $\geq 3{,}5$; ≥ 3; $\geq 2{,}5$; ≥ 2; $\geq 1{,}5$, so wären die Spaltensummen ≤ 1; $\leq 1{,}5$; ≤ 2; $\leq 2{,}5$; ≤ 3; $\leq 3{,}5$, also wäre die Summe aller Ergebnisse sowohl $\geq 16{,}5$ als auch $\leq 13{,}5$.

Für b) kann man mit recht geringem Probieraufwand eine der 671 möglichen Tabellen mit Zeilensummen $a > b > c > d > e > f=1$ finden. Ein Beispiel für heuristisches Vorgehen (dessen Formulierung vom Schüler nicht verlangt wird) ist etwa der Ansatz, daß A alle seine Spiele gewinnt, wonach $b + c + d + e + f = 10$ genau mit $b=3$; $c=2{,}5$; $d=2$; $e=1{,}5$; $f=1$ möglich ist. Dann kann man z.B. nur das Spiel C gegen E (die beiden Spieler mit nicht ganzen Punktzahlen) unentschieden ansetzen und $b=3$ etwa durch ein von B („leichtsinnig") gegen F verlorenes Spiel erreichen.

310833 Lösung: 8 Punkte

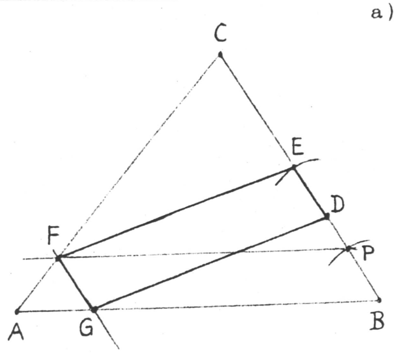

Abb. L 310833

a) Wenn F und G (bei genannter Vorgabe von A,B,C,D,E) die Bedingungen (1),(2),(3) erfüllen, so folgt: Nach (3) gilt

$$\overline{GF} = \overline{DE} \tag{4}$$

und $GF \parallel DE$, also, da D und E auf BC liegen, auch

$$GF \parallel BC\ . \tag{5}$$

Weiter folgt: Die Parallele durch F zu AB schneidet BC in einem Punkt P, da F nach (1) auf AC liegt. Für diesen Punkt P gilt

$$FP \parallel AB\ , \tag{6}$$

also auch

$$FP \parallel GB\ , \tag{7}$$

da G nach (2) auf AB liegt. Da ferner

$$P \text{ auf } BC \tag{8}$$

liegt, besagt (5) auch $GF \parallel BP$; hiernach und nach (7) folgt, daß GBPF ein Parallelogramm ist. Also gilt $\overline{GF} = \overline{BP}$ und damit wegen (4) auch

$$\overline{BP} = \overline{DE}\ . \tag{9}$$

Mit (8),(9),(6),(5) ist bewiesen, daß F und G durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

b) [1] Man konstruiert denjenigen[1] Punkt P auf BC, für den $\overline{BP} = \overline{DE}$ gilt.

[2] Man konstruiert die Parallele durch P zu AB; sie schneidet AC in einem Punkt F.

[3] Man konstruiert die Parallele durch F zu BC; sie schneidet AB in einem Punkt G.

c) Wenn F,G nach dieser Beschreibung konstruiert sind, so folgt:

Nach [2], [3] liegt F auf AC bzw. G auf AB; d.h., (1), (2) sind erfüllt.
Nach [2], [3] gilt ferner

$$FP \parallel AB \;, \quad GF \parallel BC \;. \tag{10}$$

Da aber G auf AB und P nach [1] auf BC liegt, besagt (10) auch $FP \parallel GB$, $GF \parallel BP$; also ist GBPF ein Parallelogramm. Folglich gilt $\overline{GF} = \overline{BP}$ und damit nach [1] auch

$$\overline{GF} = \overline{DE} \;. \tag{11}$$

Wegen (10) und weil D,E auf BC liegen, ist

$$GF \parallel DE \;; \tag{12}$$

mit (11),(12) ist gezeigt: DEFG ist ein Parallelogramm[2]; d.h., auch (3) ist erfüllt.

d) Konstruktion: Abb. L 310833.

<u>Andere Lösungsdarstellungen</u> sind unter Verwendung von Verschiebungen möglich: Zu a) führt man aus, daß DE nach (3) durch Verschiebung in GF und dann (wegen D,E auf BC) in BP überführt werden kann. Zu c) verwendet man, daß DE nach [1] mit BP und dies nach [2],[3] mit GF verschiebungsgleich ist.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Die im obigen Lösungstext ausführlich gehaltenen *lagebezogenen* Teilschritte werden so explizit nicht vom Schüler verlangt. Erst recht gilt dies von den Bemerkungen in den Fußnoten.

---

[1] Die *Existenz eines solchen Punktes* P (und dann auch seine Eindeutigkeit) folgt daraus, daß nach Vorgabe der Punkte D,E stets $\overline{DE} < \overline{BC}$ sein muß.

[2] Die hier genannte *Reihenfolge* D,E,F,G entspricht auch einer Umlaufung des Parallelogramms, da (nach Vorgabe von D,E) beim Durchlaufen der gerichteten Strecke von B nach C erst D, dann E erreicht wird und folglich GF nicht nur parallel, sondern (wegen G auf AB, F auf AC) sogar gleichsinnig parallel zu DE sein muß.

31. Mathematik-Olympiade
Hinweise zur Korrektur, Vorschläge zur Punktverteilung

Olympiadeklasse 8
1.Tag

Für jede Aufgabe ist die zum Lösungstext genannte Gesamtpunktzahl beizubehalten, während die unten skizzierte weitere Aufteilung im Sinn eines Vorschlags gegeben wird und als Grundlage zur individuellen Einschätzung der vom Schüler erbrachten *Bestandteile* eines *zum Ziel führenden* Lösungsweges dient („additive Punktvergabe", auch bei insgesamt unvollständiger Lösung und ohne Festlegung auf einen bestimmten Lösungsweg. „Erbracht" heißt „im Text *ersichtlich*", nicht nur hinein-interpretiert.)
Die hier gegebenen Lösungstexte selbst sind als Angabe derartiger Bestandteile eines möglichen vollständigen Lösungsweges konzipiert; sie sind *nicht etwa „Musterlösungen"*, die in angegebener Formulierung vom Schüler zu erwarten wären. So sollen z.B. „übertrieben genaue" Formulierungen auf Lösungsteile hinweisen, die in verschiedenartigen schülergemäßen Fassungen erbracht werden können, aber jedenfalls (bei Wahl dieses Lösungsweges) nicht fehlen dürfen. Gelegentlich enthält der Lösungstext auch - in Gestalt von Fußnoten, „Hinweisen", „Bemerkungen" oder in Klammern gesetzten Texteinschüben - Angaben, die zu einem vollständigen Lösungsweg nicht erforderlich sind.
Das *Zitieren* eines ohne Beweis benutzten mathematischen Sachverhaltes ist als ausreichender Teilschritt (anteilig) zu werten, wenn es mit üblicher oder genügend deutlicher Kennzeichnung geschieht (z.B. „Thalessatz", „Winkelsumme im Viereck") oder durch inhaltliche Angabe erfolgt (z.B. Voraussetzung und Behauptung eines Satzes). Im Sinne einer Grenzfall-Problematik ist bei Auftreten der Frage zu handeln, ob ein Zitat nicht akzeptabel sei, da laut Aufgabentext ein Beweis(schritt) als *gefordert* anzusehen sei. Ähnliches gilt zur Frage der Anerkennung *anschaulicher* Beweismittel und zum Akzeptieren altersgerechter Beweislücken. Beispiel: Zwar möglicherweise Verzicht auf *Beweis zu* (bzw. Herleitung aus) geometrischen *Lageaussagen*; aber Forderung nach *Berücksichtigung* aller Lagemöglichkeiten.

Punktverteilungsvorschläge:

310831

Nutzung von Teilbarkeitsaussagen	3
Nutzung der Ungleichungen (Restkugeln >1000 bzw. <1000)	2
Abschließende Ermittlung der gesuchten Anzahlen	2
	7

310832

a) Widerlegung einer kleinsten Punktzahl > 1:	
Nutzung von Ungleichungen für andere Punktzahlen	2
Abschließende Herleitung eines Widerspruchs	2
b) Nachweis der Möglichkeit einer kleinsten Punktzahl 1	2
	6

310833

a) Herleitg.v.konstruktions-nutzbaren Aussagen („Analyse")	2
b) Konstruktionsbeschreibung	2
c) Beweis, daß sie auf F,G mit (1),(2),(3) führt	2
d) Inhaltl.korrekte, zeichnerisch sorgfältige Konstruktion	2
	8

31. Mathematik-Olympiade
Lösungen
Olympiadeklasse 8
2. Tag

<u>310834 Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Für alle $a \geq 2$, $b \geq 2$ gilt

$$a-1 \geq 1 \ , \quad b-1 \geq 1 \ . \tag{1}$$

Da in beiden Beziehungen (1) die auf beiden Seiten stehenden Zahlen positiv sind, folgt durch Multiplikation

$$(a-1)(b-1) \geq 1 \ , \tag{2}$$
$$ab - a - b + 1 \geq 1 \ ,$$
$$ab \geq a + b \ . \tag{3}$$

Gleichheit gilt in (3) genau dann, wenn sie in (2) gilt, und das ist genau dann der Fall, wenn in beiden Beziehungen (1) Gleichheit gilt. Damit ist gezeigt:

Es gibt <u>keine</u> Zahlen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$, für die das Produkt ab *kleiner* als die Summe a+b wäre;

im Fall, daß <u>beide Zahlen a, b gleich 2</u> sind, ist das Produkt ab *gleich* der Summe a+b;

für <u>alle anderen</u> a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$ ist das Produkt ab *größer* als die Summe a+b.

<u>2. Lösungsweg:</u> Für jedes $a \geq 2$ und jedes $b \geq 2$ gibt es Zahlen $p \geq 0$ und $q \geq 0$ mit $a = 2+p$, $b = 2+q$. Daraus folgt

$$ab = (2+p)(2+q) = 4 + 2p + 2q + pq \ , \tag{4}$$
$$a + b = 2+p + 2+q = 4 + p + q \ . \tag{5}$$

Wegen $p \geq 0$, $q \geq 0$ ist $p + q + pq \geq 0$,
also

$$2p + 2q + pq \geq p + q \ . \tag{6}$$

Aus (4),(5),(6) folgt stets (3); Gleichheit gilt darin genau im Fall $p = q = 0$, d.h. $a = b = 2$.

<u>310835 Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

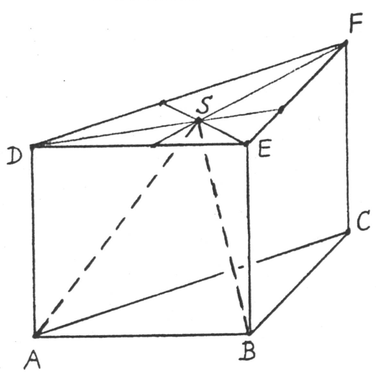

Abb. L 310835 a

Da ES und DS nach Voraussetzung die Winkel $\sphericalangle$ DEF und $\sphericalangle$ EDF halbieren und da im rechtwinkligen Dreieck $\overline{\sphericalangle EDF} < 90° = \overline{\sphericalangle DEF}$ gilt, folgt

$$\overline{\sphericalangle EDS} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle EDF} < \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle DEF} = \overline{\sphericalangle DES} \ .$$

Im Dreieck DES liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber, also folgt weiter

$$\overline{ES} < \overline{DS} \ . \tag{1}$$

Da ABCDEF ein gerades Prisma ist, stehen AD und BE auf der Deckfläche DEF senkrecht, daher gilt

$$\overline{\sphericalangle ADS} = \overline{\sphericalangle BES} = 90° \ ; \tag{2}$$

ferner gilt für die Seitenkanten

$$\overline{AD} = \overline{BE} \ . \tag{3}$$

Aus (1), (2), (3) kann die Behauptung $\overline{BS} < \overline{AS}$ z.B. folgendermaßen erhalten werden: Wegen (2) und (3) kann man in einer Ebene Punkte $A'=B'$, $D'=E'$, S' und S'' so wählen, daß S' und S'' auf demselben von D' ausgehenden Strahl liegen und

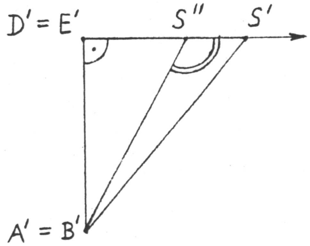

Abb. L 310835 b

$$\Delta\, A'D'S' \cong \Delta ADS,\quad \Delta\, B'E'S'' \cong \Delta BES \qquad (4)$$

gilt (siehe Abb. L 310835 b).

Wegen (1) liegt dann S'' zwischen D' und S', ferner ist $\overline{\measuredangle A'S''E'} < 90^\circ$, also $\overline{\measuredangle A'S''S'} > 90^\circ$, und im Dreieck $A'S''S'$ daher $\measuredangle A'S''S'$ der größte Winkel. Daraus und aus (4) folgt

$$\overline{BS} = \overline{B'S''} < \overline{A'S'} = \overline{AS} .$$

<u>Andere Lösungsfortsetzung</u> nach (3): Aus (2) folgt nach dem Satz des Pythagoras sowie wegen (3) und (1)

$$\overline{BS} = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{ES}^2} < \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DS}^2} = \overline{AS} .$$

<u>310836 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Es gilt $a \cdot h_a = c \cdot h_c$; dies folgt daraus, daß sowohl $\frac{1}{2}\, a \cdot h_a$ als auch $\frac{1}{2}\, c \cdot h_c$ der Flächeninhalt von ABC ist (oder auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCD, BAE). Somit ergibt sich

$$c = \frac{a \cdot h_a}{h_c} = \frac{845 \cdot 840}{780}\ \text{cm} = 910\ \text{cm} .$$

Wegen $\overline{\measuredangle BDC} = 90^\circ$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{BD} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = \sqrt{845^2 - 780^2}\ \text{cm} = 325\ \text{cm} .$$

Je nachdem, ob D zwischen $A=A_1$ und B liegt (siehe Abb. L 310836 a) oder B zwischen $A=A_2$ und D (Abb. L 310836 b), erhält man weiter

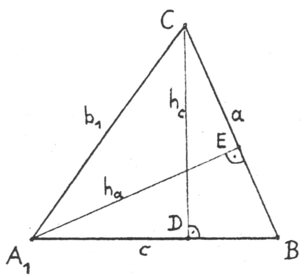

Abb. L 310836 a

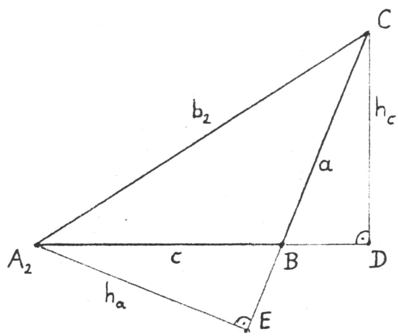

Abb. L 310836 b

$$\overline{A_1D} = c - \overline{BD} = 910\text{ cm} - 325\text{ cm} = 585\text{ cm}$$

bzw. $$\overline{A_2D} = c + \overline{BD} = 910\text{ cm} + 325\text{ cm} = 1235\text{ cm} .$$

Als gesuchte Seitenlänge b erhält man damit im Dreieck A_1BC

$$b_1 = \overline{A_1C} = \sqrt{\overline{A_1D}^{\,2} + h_c^{\,2}} = \sqrt{585^2 + 780^2}\text{ cm} = 975\text{ cm}$$

und im Dreieck A_2BC

$$b_2 = \overline{A_2C} = \sqrt{\overline{A_2D}^{\,2} + h_c^{\,2}} = \sqrt{1235^2 + 780^2}\text{ cm}$$

$$= \sqrt{2133625}\text{ cm} = 65\cdot\sqrt{505}\text{ cm} \approx 1460{,}69\text{ cm} .$$

31. Mathematik-Olympiade
Vorschläge zur Punktverteilung
Olympiadeklasse 8
2.Tag

310834

Beweis zu: Für alle $a,b \geq 2$ gilt $ab \geq a+b$ 3

" " Unter allen $a,b \geq 2$ gilt $ab = a+b$ nur für $a=b=2$ 3

6

310835

Nachweis zu $\overline{ES} < \overline{DS}$ 3

Nachweis zu $\overline{SB} < \overline{SA}$ (Hilfskonstruktion oder Pythagoras) 3

6

310836

Berechnung von c 2

Berechnung von b_1 und b_2:

Fallunterscheidung; Berechnung von (z.B.) $\overline{A_1D}$ und $\overline{A_2D}$ 2

Abschließende Berechnung von b_1 und b_2 [z.B.:
(Gemeinsame) Formel/Auswertung b_1/Auswertung b_2 je 1P.] ... 3
(Forderungen an Rundungsgenauigkeit oder
Quadratfreiheit des Radikanden werden nicht gestellt.)

7