310821

In einer Schulklasse ist jeder Schüler 13 oder 14 Jahre alt; beide Altersangaben kommen in dieser Klasse auch wirklich vor. Addiert man alle diese (ganzzahlig gerechneten) Altersangaben, so ergibt sich die Summe 325.

Untersuche, ob durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist, wieviele Schüler in dieser Klasse sind! Ist das der Fall, so gib die Schülerzahl an!

310822

a) Klaus wählt natürliche Zahlen m und n mit $0 < m < n$ und bildet die Zahlen $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{n}{m}$. Dann ordnet er die drei Zahlen 1, p, q der Größe nach, beginnend mit der kleinsten.
Beweise, daß sich bei jeder Wahl solcher m, n stets dieselbe Reihenfolge für 1, p, q ergeben muß! Wie lautet sie?

b) Nun zeichnet Klaus auf einer Zahlengeraden die drei Punkte E, P, Q, die den Zahlen 1, p, q zugeordnet sind. Er ordnet dann die beiden Längen $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ der Größe nach.
Zeichne für das Beispiel $m = 2$, $n = 5$ die Strecken EP, EQ auf einer Zahlengeraden, deren Einheitsstrecke (vom Nullpunkt O bis E) die Länge $\overline{OE} = 4$ cm hat! Beweise, daß sich (bei jeder Wahl obengenannter m, n) auch für $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ stets dieselbe Reihenfolge ergeben muß! Wie lautet sie?

310823

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Der Winkel $\angle BAC$ habe die Größe $\alpha = 30^\circ$. Der Mittelpunkt der Seite AB sei D, der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sei S.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen $\overline{CS} = \overline{DS}$ folgt!

310824

a) Konstruiere einen Kreis mit dem Radius 3 cm, zwei zueinander parallele Tangenten t_1, t_2 sowie eine dritte Tangente t_3 an diesen Kreis!
Für die Schnittpunkte A, B von t_3 mit t_1 bzw. mit t_2 und für den Mittelpunkt M des Kreises stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\angle AMB$ auf!

b) Beweise, daß diese Vermutung stets zutrifft, wenn t_1, t_2, t_3 drei Tangenten an einen Kreis sind und $t_1 \parallel t_2$ ist!

c) Beweise, daß dann auch stets für den Schnittpunkt Q, den AB mit der Parallelen p durch M zu t_1 und t_2 hat, $\overline{AQ} = \overline{MQ}$ gilt!

310821 Lösung: 9 Punkte

Ist x bzw. y die Anzahl der 13- bzw. 14-jährigen Schüler, so folgt

$$13x + 14y = 325 = 13 \cdot 25 \qquad (1)$$

Somit ist $14y$ durch 13 teilbar, also[1] auch

y durch 13 teilbar.

Nach den Feststellungen im Aufgabentext ist ferner

$$y > 0$$

sowie $x > 0$, wegen (1) also $14y < 325$ und folglich $14y < 14 \cdot 26$,

$$y < 26 .$$

Daher verbleibt nur die Möglichkeit

$$y = 13 ,$$

und aus (1), also $13 \cdot (x + 14) = 13 \cdot 25$, folgt $x + 14 = 25$,

$$x = 11 .$$

Also ist die Schülerzahl der Klasse eindeutig durch die Feststellungen bestimmt; sie beträgt

$$x + y = 24 .$$

310822 Lösung: 10 Punkte

a) Für natürliche Zahlen m, n mit

$$0 < m < n \qquad (1)$$

folgt stets, indem man (1) durch m bzw. n dividiert,

$$1 < \frac{n}{m}$$

bzw. $\frac{m}{n} < 1$;

d.h., es ergibt sich stets die Reihenfolge

$$p < 1 < q . \qquad (2)$$

b) Zeichnung: Abb. L 310822

Aus (2) folgt: Die Strecke EP hat die Länge

$$\overline{EP} = 1 - p = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n - m}{n} ,$$

die Strecke EQ hat die Länge

$$\overline{EQ} = q - 1 = \frac{n}{m} - 1 = \frac{n - m}{m} .$$

Nach (1) ist $n - m > 0$, hieraus und aus (1) folgt

$$\frac{n - m}{m} > \frac{n - m}{n} ;$$

d.h., es ergibt sich stets die Reihenfolge $\overline{EP} < \overline{EQ}$.

310823 Lösung: 10 Punkte

Aus $\overline{\angle ACB} = 90^\circ$ und $\overline{\angle BAC} = 30^\circ$ folgt nach dem Innenwinkelsatz

$$\overline{\angle ABC} = 60^\circ . \qquad (1)$$

Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt C auf einem Halbkreis über AB, also ist $\overline{DB} = \overline{DC}$ und daher nach dem Basiswinkelsatz

$$\overline{\angle DCB} = \overline{\angle DBC} . \qquad (2)$$

Nach (1),(2) (und $\angle ABC = \angle DBC$) ist BCD ein gleichseitiges Dreieck. Darin ist die Gerade durch B und S, die den Winkel $\angle DBC$ halbiert, zugleich die Mittelsenkrechte der Seite CD. Also erfüllt S, wie jeder Punkt dieser Mittelsenkrechten, die Bedingung

$$\overline{CS} = \overline{DS} ,$$

w.z.b.w.

---

[1] Man schließt z.B.: Mit $14y$ ist auch $y = 14y-13y$ durch 13 teilbar. Oder man beruft sich auf die Teilerfremdheit von 13 und 14.

<u>Bemerkungen:</u> Wie soeben erhalten, gilt $\overline{CX} = \overline{DX}$ für jeden Punkt X der Geraden durch B und S. Verlängert man sie bis zum Schnitt E mit AC, so ist also z.B. auch $\overline{CE} = \overline{DE}$. Man kann dies auch mit anderen Zwischenschritten herleiten und dann zu einem Nachweis von $\overline{CS} = \overline{DS}$ mit heranziehen. Auch sonst gibt es zum Beweis von $\overline{CS} = \overline{DS}$ (oder der allgemeineren Aussage $\overline{CX} = \overline{DX}$ für $X \in BS$) mehrere Möglichkeiten; Abb. L 310823 zeigt einige Gradangaben, die bei solchen Lösungswegen eine Rolle spielen können.

<u>310824 Lösung:</u> 11 Punkte

a) Abb. L 310824 zeigt eine geforderte Konstruktion.
Vermutung: Es gilt $\overline{\sphericalangle\, AMB} = 90^\circ$.

b) Beweis: Ist P_i der Berührungspunkt von t_i $(i = 1, 2, 3)$, so folgt nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius: Wegen $t_1 \parallel t_2$ sind MP_1 und MP_2 zueinander parallele Radien, was nur möglich ist, wenn sie einen Durchmesser P_1P_2 bilden, d.h. wenn

$$\overline{\sphericalangle\, P_1MP_2} = 180^\circ \qquad (1)$$

ist. Aus ($\overline{MA} = \overline{MA}$ und) $\overline{\sphericalangle\, MP_1A} = \overline{\sphericalangle\, MP_3A} = 90^\circ$,

$$\overline{MP_1} = \overline{MP_3} \qquad \text{(Radien des Kreises),}$$

$$< \overline{MA} \qquad \text{(da MA Hypotenuse ist)}$$

folgt nun nach dem Kongruenzsatz Ssw

$$\triangle\, AMP_1 \cong \triangle\, AMP_3 ,$$

also halbiert MA den Winkel $\sphericalangle\, P_1MP_3$. Ebenso folgt: MB halbiert $\sphericalangle\, P_2MP_3$. Wegen (1), d.h.

$$\overline{\sphericalangle\, P_1MP_3} + \overline{\sphericalangle\, P_2MP_3} = 180^\circ ,$$

ist folglich $\overline{\sphericalangle\, AMP_3} + \overline{\sphericalangle\, BMP_3} = 90^\circ$, d.h.

$$\sphericalangle\, AMB = 90^\circ , \qquad (2)$$

w.z.b.w.

c) Wegen $t_1 \parallel p \parallel t_2$ folgt[1] aus $\overline{MP_1} = \overline{MP_2}$ auch $\overline{QA} = \overline{QB}$.
Nach (2) und der Umkehrung des Thalessatzes liegt M auf einem Halbkreis über AB ; für dessen Radien gilt somit $\overline{AQ} = \overline{MQ}$.

---

[1] Im Fall $t_3 \parallel P_1P_2$ wende man den Satz über die Gleichheit der Gegenseiten im Parallelogramm an, andernfalls den Strahlensatz oder eine Umkehrung des Satzes von der Mittelparallele im Trapez.

Abb. 310822

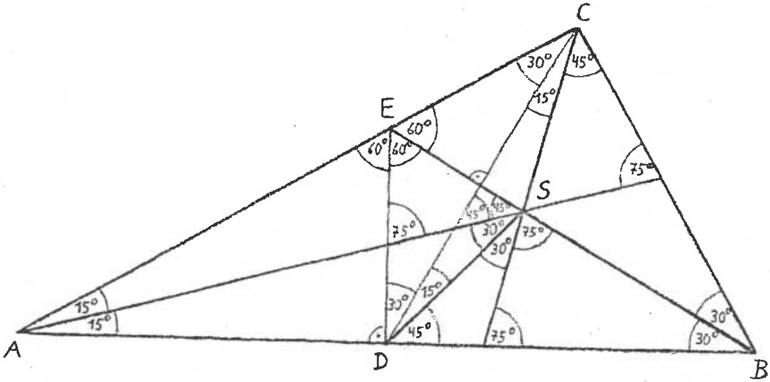

Abb. L 310823

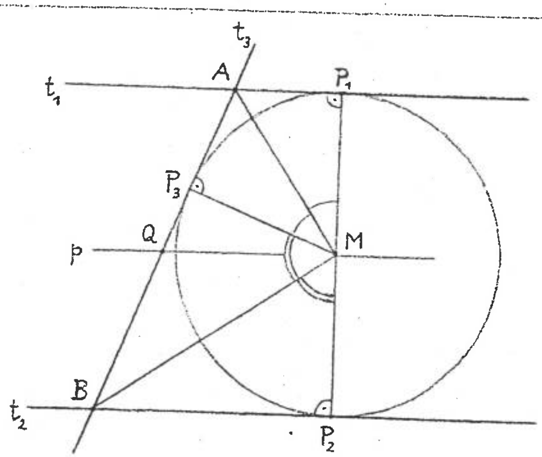

Abb. L 310824

310821
Nutzung der Bedingung (1) 3
Weiterführende (z.B. auf Teilbarkeit und Ungleichungen
beruhende) Schlußweise 4
Abschließende Gewinnung des Ergebnisses 2
9

310822
a) Herleitung der Reihenfolge (2) 3
b) Zeichnung: Zahlenstrahl mit zeichengenau richtiger
Lage der Punkte O, E, P, Q 2
Ermittlung von Formeln für $\overline{EP}$, $\overline{EQ}$ (oder gleichwertiger Vorbereitungsschritt für eine folgende) 3
Herleitung von $\overline{EP} < \overline{EQ}$ 2
10

310823
Bei jedem Lösungsweg sind etwa drei wesentliche Herleitungsschritte zu erbringen (im Beispiel: Gleichseitigkeit von BCD, BS Mittelsenkrechte von CD, Schluß auf $\overline{CS} = \overline{DS}$).
Bewertung solcher Schritte z.B. mit 3 + 4 + 3 = ... 10

310824
a) Konstruktion 3
b) Etwa zwei wesentliche Beweisschritte (im Beispiel Halbierung der Winkel $\angle P_1MP_3$ und $\angle P_2MP_3$; Beweis und Nutzung von $\angle P_1MP_2=180^\circ$) : z.B. 2+2 4
c) 2 Schritte
(Q halbiert AB; Umkehrung des Thalessatzes): z.B. 2+2 4
11