31. Mathematik-Olympiade

Aufgaben

Olympiadeklasse 7

1.Tag

<u>Hinweis:</u>*Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.

310731

Bei einer Geburtstagsfeier wurden an die Kinder Bonbons verteilt:

Das 1.Kind bekam 1 Bonbon und ein Zehntel vom verbleibenden Rest,
" 2. " " 2 Bonbons " " " vom nun " " ,
" 3. " " 3 " " " " " " " " ,
....

usw. . Schließlich waren, als dies konsequent fortgesetzt worden war, alle Bonbons verteilt, und es stellte sich heraus, daß jedes Kind dieselbe Anzahl Bonbons erhalten hatte wie jedes andere Kind.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl a aller verteilten Bonbons, die Anzahl k aller beteiligten Kinder und die Anzahl b derjenigen Bonbons, die jedes dieser Kinder erhielt! Überprüfe, daß für die von dir ermittelten Anzahlen a, k, b alle obengenannten Angaben zutreffen!

310732

Ein Mensch antwortete auf die Frage nach seinem Geburtstag:

> „Im Jahr 1989 wurde ich a Jahre alt. Geboren wurde ich am t-ten Tag des m-ten Monats des Jahres (1900+j). Die Zahlen a, j, m, t sind natürliche Zahlen; für sie gilt $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792$."

Stelle fest, ob die Zahlen a, j, m, t durch diese Angaben eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib diese Zahlen an!

310733

Zu einem gegebenen konvexen Fünfeck ABCDE soll ein Rechteck FGHJ konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck ABCDE hat.

a) Beschreibe eine Konstruktion, die mit jedem konvexen Fünfeck ABCDE durchführbar ist und vier Punkte F, G, H, J ergibt!
b) Beweise, daß für jedes konvexe Fünfeck ABCDE die nach deiner Beschreibung konstruierten Punkte die Ecken eines Rechtecks FGHJ sind, das denselben Flächeninhalt wie ABCDE hat!
c) Führe an einem von dir gewählten Fünfeck ABCDE die von dir beschriebene Konstruktion durch!

<u>Hinweis:</u> Ein Fünfeck ist genau dann konvex, wenn es nicht überschlagen ist (d.h. außer den Ecken keine gemeinsamen Punkte zweier Seiten aufweist) und wenn kein Innenwinkel des Fünfecks größer als 180° ist.

31. Mathematik-Olympiade
Aufgaben
Olympiadeklasse 7
2.Tag

310734

Wenn für ein Paar von Primzahlen gilt, daß eine Primzahl des Paares um 2 größer ist als die andere, so bezeichnet man dieses Paar als ein Paar von *Primzahlzwillingen*.

Beweise, daß für jedes Paar von Primzahlzwillingen, die größer als 3 sind, die Summe der beiden Primzahlen dieses Paares stets durch 12 teilbar ist!

310735

Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden AD und BE, ferner bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und F_2 den Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks ABDSE.

Ermittle für jedes Dreieck ABC das Verhältnis $F_1 : F_2$ dieser beiden Flächeninhalte!

310736

Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(1) Es gibt eine Gerade, auf der die drei Punkte M_1 , M_2 und M_3 liegen.
(2) Jeder der drei Kreise k_2 , k_3 und k_4 berührt den Kreis k_1 von innen.
(3) Je zwei der Kreise k_2 , k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen.

a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck $M_1M_2M_4$ einen ebenso großen Umfang u wie das Dreieck $M_1M_3M_4$ hat!

b) Die Radien von k_1, k_2, k_3, k_4 seien r_1, r_2, r_3, r_4 . Zeige, daß eine Vorgabe solcher Radien stets ausreicht, um daraus u zu ermitteln! Drücke u durch möglichst wenig vorzugebende Radien aus!

31. Mathematik-Olympiade
Lösungen
Olympiadeklasse 7
1.Tag

310731 Lösung: 7 Punkte

Aus den Angaben folgt: Das 1.Kind bekam $1 + \frac{1}{10}\cdot(a-1) = \frac{a}{10} + \frac{9}{10}$ Bonbons, danach waren $a - \left(\frac{a}{10} + \frac{9}{10}\right) = \frac{9a}{10} - \frac{9}{10}$ Bonbons vorhanden.

Das 2.Kind bekam $2 + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9a}{10} - \frac{9}{10} - 2\right) = \frac{9a}{100} + \frac{171}{100}$ Bonbons. Da auch das 1.Kind diese Anzahl erhalten hatte, folgt

$$\frac{a}{10} + \frac{9}{10} = \frac{9a}{100} + \frac{171}{100},$$

$$10a + 90 = 9a + 171,$$

$$a = 81$$

und damit weiter $$b = \frac{a}{10} + \frac{9}{10} = \frac{81}{10} + \frac{9}{10} = 9.$$

Da jedes der k Kinder b Bonbons bekam, ist die Anzahl aller verteilten Bonbons $a = k\cdot b$; damit folgt

$$k = 81:9 = 9.$$

Überprüfung:

Nummer des Kindes	Anzahl der an dieses Kind ausgegebenen Bonbons	danach verbleibender Rest
1	1 + 80:10 = 9	81 - 9 = 72
2	2 + 70:10 = 9	72 - 9 = 63
....	....	....
8	8 + 10:10 = 9	18 - 9 = 9
9	9 + 0:10 = 9	9 - 9 = 0

2.Lösungsweg: Da am Ende alle Bonbons verteilt waren, gilt für den Rest r, der nach dem Ausgeben von k Bonbons an das k-te Kind verblieb: Dieses Kind erhielt anschließend alle r Bonbons. Andererseits waren dies aufgrund der Verteilungsregel $\frac{r}{10}$ Bonbons. Also gilt $r = \frac{r}{10}$; daraus folgt $r = 0$, das k-te Kind erhielt k Bonbons; d.h., es gilt $b = k$.

Weiter folgt: Nachdem das (k-1)-te Kind zunächst k-1 Bonbons erhalten hatte, bekam es (um auf die Anzahl $b = k$ zu kommen) noch 1 Bonbon; dies war ein Zehntel des Restes, der nach dem Ausgeben der k-1 Bonbons verblieb, also bestand dieser Rest aus 10 Bonbons. Somit waren dann für das k-te Kind noch 10-1 = 9 Bonbons übrig; es gilt $b = 9$. Damit folgt $a = k\cdot b = 81$.

310732 Lösung: 6 Punkte

Aus der Bedeutung der Zahlen folgt

$$0 < m \leq 12 \quad , \quad 0 < t \leq 31 \; ; \qquad (1)$$

auch die Zahlen a und j, für die

$$a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792 \qquad (2)$$

gilt, sind folglich beide größer als Null; sie erfüllen ferner

$$a + j = 89 \qquad (3)$$

und sind daher beide kleiner als 89. Wegen der Primfaktorzerlegung $105792 = 2^6 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 29$ hat 105792 unter den natürlichen Zahlen kleiner als 89 genau die folgenden Teiler:

1,2,3,4,6,8,12,16,19,24,29,32,38,48,57,58,64,76,87.

Die einzigen Möglichkeiten, hieraus zwei Zahlen a, j mit (3) auszuwählen, sind

$$(a;j) = (2;87),\ (87;2),\ (32;57),\ (57;32)\ . \qquad (4)$$

Von ihnen scheiden (2;87) und (87;2) aus; denn wegen (1) wäre für sie $a \cdot j \cdot m \cdot t \leq 2 \cdot 87 \cdot 12 \cdot 31 < 105792$, was (2) widerspricht.

Daher folgt nun aus (2), daß m und t die Bedingung

$$m \cdot t = \frac{105792}{32 \cdot 57} = 2 \cdot 29$$

erfüllen. Da 2 und 29 Primzahlen sind, ist das wegen (1) nur mit

$$m = 2, \quad t = 29 \qquad (5)$$

möglich; d.h., der Geburtstag kann nur ein 29.Februar gewesen sein. Diese Datumsangabe ist mit j = 57, d.h. für das Jahr 1957, nicht möglich, da es kein Schaltjahr war. Also verbleibt von (4) nur die Möglichkeit

$$a = 57, \quad j = 32\ . \qquad (6)$$

Damit ist gezeigt: Die Zahlen a,j,m,t sind durch die Angaben eindeutig bestimmt; sie lauten wie in (5),(6) angegeben.

310733 Lösung: 8 Punkte

a) Konstruktionsbeschreibung:
   (1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD; sie schneidet die Gerade durch A,B in einem Punkt F.
   (2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD; sie schneidet die Gerade durch A,B in einem Punkt G.
   (3) Man konstruiert den Mittelpunkt M von AD und die Parallele p durch M zu FG.
   (4) Man konstruiert die Senkrechten zu FG durch F und durch G; sie schneiden p in je einem Punkt J bzw. H.

b) Werden F,G,H,J nach dieser Beschreibung konstruiert, so folgt: Nach den Konstruktionsschritten (3),(4) ist FGHJ ein Rechteck. Ferner hat nach (1),(2) das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck ABCDE. Dies kann [als bekannter Sachverhalt aus 310724 zitiert oder] folgendermaßen bewiesen werden: Nach (1)

haben F und E gleichen Abstand von AD, also ist das Dreieck ADF flächeninhaltsgleich zum Dreieck ADE. Nach (2) ist ebenso BDG flächeninhaltsgleich zu BDC. Addiert man noch den Flächeninhalt von ABD, so folgt die behauptete Flächeninhaltsgleichheit von FGD mit ABCDE.
Nach (3) und dem Strahlensatz hat M halb so großen Abstand von FG wie D; daher hat das Rechteck FGHJ denselben Flächeninhalt wie das Dreieck FGD und folglich auch wie ABCDE.

c) Konstruktion: Abb. L 310733.

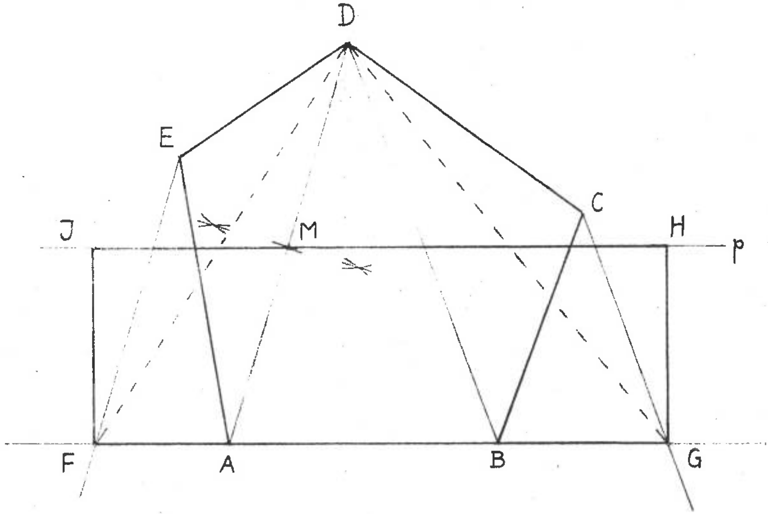

Abb. L 310733

31. Mathematik-Olympiade
Hinweise zur Korrektur, Vorschläge zur Punktverteilung

Olympiadeklasse 7
1.Tag

Für jede Aufgabe ist die zum Lösungstext genannte Gesamtpunktzahl beizubehalten, während die unten skizzierte weitere Aufteilung im Sinn eines Vorschlags gegeben wird und als Grundlage zur individuellen Einschätzung der vom Schüler erbrachten *Bestandteile* eines *zum Ziel führenden* Lösungsweges dient („additive Punktvergabe", auch bei insgesamt unvollständiger Lösung und ohne Festlegung auf einen bestimmten Lösungsweg. „Erbracht" heißt „im Text *ersichtlich*", nicht nur hinein-interpretiert.)
Die hier gegebenen Lösungstexte selbst sind als Angabe derartiger Bestandteile eines möglichen vollständigen Lösungsweges konzipiert; sie sind *nicht etwa „Musterlösungen*", die in angegebener Formulierung vom Schüler zu erwarten wären. So sollen z.B. „übertrieben genaue" Formulierungen auf Lösungsteile hinweisen, die in verschiedenartigen schülergemäßen Fassungen erbracht werden können, aber jedenfalls (bei Wahl dieses Lösungsweges) nicht fehlen dürfen. Gelegentlich enthält der Lösungstext auch - in Gestalt von Fußnoten, „Hinweisen", „Bemerkungen" oder in Klammern gesetzten Texteinschüben - Angaben, die zu einem vollständigen Lösungsweg nicht erforderlich sind.
Das *Zitieren* eines ohne Beweis benutzten mathematischen Sachverhaltes ist als ausreichender Teilschritt (anteilig) zu werten, wenn es mit üblicher oder genügend deutlicher Kennzeichnung geschieht (z.B. „Thalessatz", „Winkelsumme im Viereck") oder durch inhaltliche Angabe erfolgt (z.B. Voraussetzung und Behauptung eines Satzes). Im Sinne einer Grenzfall-Problematik ist bei Auftreten der Frage zu handeln, ob ein Zitat nicht akzeptabel sei, da laut Aufgabentext ein Beweis(schritt) als *gefordert* anzusehen sei. Ähnliches gilt zur Frage der Anerkennung *anschaulicher* Beweismittel und zum Akzeptieren altersgerechter Beweislücken. Beispiel: Zwar möglicherweise Verzicht auf *Beweis zu* (bzw. Herleitung aus) geometrischen *Lageaussagen*; aber Forderung nach *Berücksichtigung* aller Lagemöglichkeiten.

<u>Punktverteilungsvorschläge:</u>

<u>310731</u>

Herleitung einer zur Ermittlung von a,k,b nutzbaren Beziehung zwischen diesen Zahlen	3
Anschließende Ermittlung von a,k,b	2
Überprüfung	2
	7

<u>310732</u>

(Erkennung und) Nutzung von $a+j = 89$	1
Weitere Schritte unter Nutzung der Primfaktorzerlegung (z.B. Übersicht über Teiler von 105792)	3
Desgl. bezügl.Nichtexistenz des 29.2. in Nicht-Schaltjahren ...	2
	6

<u>310733</u>

a) Konstruktionsbeschreibung	2
b) Beweis, daß sie auf ein zu ABCDE inhaltsgl.Rechteck führt ..	3
c) Inhaltl.korrekte, zeichnerisch sorgfältige Konstruktion	3
	8

31. Mathematik-Olympiade

Lösungen

Olympiadeklasse 7

2.Tag

310734 Lösung: 6 Punkte

Ist (p,q) ein Paar von Primzahlzwillingen mit $q > p > 3$, so folgt: Da 2 die einzige gerade Primzahl ist, ist p ungerade, also gilt $p = 2n+1$ mit einer natürlichen Zahl n und daher $q = p+2 = 2n+3$. Also ist $p+q = (2n+1) + (2n+3) = 4(n+1)$ durch 4 teilbar.

Da 3 die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist, sind p und q nicht durch 3 teilbar. Wenn ferner p bei Division durch 3 den Rest 1 lassen würde, d.h., wenn $p = 3n+1$ mit einer natürlichen Zahl n wäre, so ergäbe sich der Widerspruch, daß $q = p+2 = 3n+3 = 3(n+1)$ durch 3 teilbar wäre. Also muß p bei Division durch 3 den Rest 2 lassen; d.h., es muß $p = 3n+2$ mit einer natürlichen Zahl n gelten. Damit folgt $q = p+2 = 3n+4$; demnach ist $p+q = (3n+2) + (3n+4) = 3\cdot(2n+2)$ durch 3 teilbar.

Aus der Teilbarkeit von $p+q$ durch die zueinander teilerfremden Zahlen 4 und 3 folgt: $p+q$ ist durch $4\cdot 3 = 12$ teilbar, w.z.b.w.

2.Lösungsweg: Jede Primzahl, die größer als 3 ist, ist mit einer natürlichen Zahl n von der Form $6n+1$ oder $6n-1$. (Dies kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder durch Diskussion aller Möglichkeiten für den Rest bei Division durch 6 bewiesen werden.) Für zwei solche Zahlen $p < q$ ist die Differenz $q-p = 2$ nur möglich, wenn sie von der Form $p = 6n-1$ und $q = 6n+1$ mit demselben n sind. Daraus folgt: $p+q = 12n$ ist durch 12 teilbar.

310735 Lösung: 6 Punkte

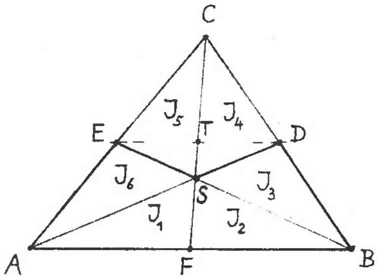

Abb. L 310735

In jedem Dreieck ABC haben die drei Seitenhalbierenden AD, BE und CF einen gemeinsamen Schnittpunkt S. Die Flächeninhalte der Dreiecke AFS, FBS, BDS, DCS, CES und EAS seien J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 bzw. J_6 (siehe Abb. L 310735).

Wegen $\overline{AF} = \overline{FB}$ und der gemeinsamen Ecke S von AFS, FBS gilt $J_1 = J_2$. Entsprechend folgt, daß $J_3 = J_4$ und $J_5 = J_6$ gelten.

Wegen $\overline{AF} = \overline{FB}$ und der gemeinsamen Ecke C von AFC, FBC gilt

$$J_1 + J_6 + J_5 = J_2 + J_3 + J_4.$$

Hieraus und aus den vorangehenden Gleichungen folgt

$$J_1 + 2\cdot J_6 = J_1 + 2\cdot J_3$$

und daraus

$$J_6 = J_3 .$$

Entsprechend folgt (z.B.) $J_2 = J_5$.

Also gilt insgesamt $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J_5 = J_6$,

$$F_1:F_2 = (6\ J_1) : (4\ J_1) = 3:2 .$$

Es gibt mehrere <u>andere Lösungswege</u>. So kann man (nachdem $J_1 = J_2$, $J_3 = J_4$, $J_5 = J_6$ hergeleitet wurde) ED ∥ AB und daraus $J_1 + J_2 + J_6 = J_1 + J_2 + J_3$, $J_6 = J_3$ erhalten. Oder man verwendet $\overline{FS}:\overline{SC} = 1:2$ und (für den Schnittpunkt T von ED mit FC) $\overline{AF}:\overline{ET} = 2:1$, um auf $J_1 = J_5$ zu schließen.

<u>310736 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

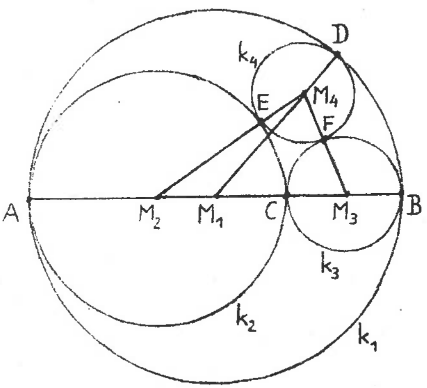

Abb. L 310736

Die in (1) genannte Gerade schneidet, da sie durch M_1 geht, den Kreis k_1 in einem Durchmesser. Nach (2) liegen die Berührungspunkte A bzw. B, die k_1 mit k_2 bzw. mit k_3 hat, auf den Verlängerungen von M_1M_2 bzw. M_1M_3 über M_2 bzw. über M_3 hinaus, sind also die Endpunkte dieses Durchmessers. (Sie sind voneinander verschieden, da andernfalls einer der Kreise k_2 , k_3 den anderen von innen berühren müßte. [Nach (3) liegt der Berührungspunkt C von k_2 und k_3 zwischen M_2 und M_3 und damit auch auf diesem Durchmesser.])

Nach (2) und (3) gilt: Der Berührungspunkt D von k_4 mit k_1 liegt auf der Verlängerung von M_1M_4 über M_4 hinaus, die Berührungspunkte E, F von k_4 mit k_2 bzw. k_3 liegen zwischen M_2 und M_4 bzw. zwischen M_3 und M_4 (siehe Abb. L 310736).

a) Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4M_2} + \overline{M_2M_1} \qquad (4)\\ &= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4E} + \overline{M_2E} + \overline{M_2M_1}\\ &= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4E} + \overline{M_2A} + \overline{M_2M_1} \end{aligned}$$

$$= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4E} + \overline{M_1A} \qquad (5)$$

$$= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4F} + \overline{M_1B} \qquad (6)$$

$$= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4F} + \overline{M_3B} + \overline{M_3M_1}$$

$$= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4F} + \overline{M_3F} + \overline{M_3M_1}$$

$$= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4M_3} + \overline{M_3M_1} \,, \qquad (7)$$

w.z.b.w.

b) Mit (5) gilt
$$u = \overline{M_1M_4} + \overline{M_4E} + \overline{M_1A}$$

$$= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4D} + \overline{M_1A}$$

$$= \overline{M_1D} + \overline{M_1A} = 2 \cdot r_1 \,. \qquad (8)$$

<u>Bemerkungen:</u> Wie dieser Lösungsweg zeigt, werden dabei die oben in eckigen Klammern [] stehenden Aussagen über C nicht benötigt.

In anderer Lösungsdarstellung kann man mit Darstellungen der $\overline{M_iM_j}$ als Summen oder Differenzen von Radien arbeiten. Dabei kann auch C heranzuziehen sein, auch eine Fallunterscheidung $r_2 \lesseqgtr r_3$ kann erforderlich werden.

Ebenso wie oben von (4) über (5) auf (8) geschlossen wurde, kann man auch zeigen, daß der Wert (7) vermittels (6) gleich $\overline{M_1D} + \overline{M_1B}$ ist. Damit erhält man für beide Dreiecksumfänge den Wert $2 \cdot r_1$ und hat zugleich a) und b) gelöst.

31. Mathematik-Olympiade
Vorschläge zur Punktverteilung
Olympiadeklasse 7
2.Tag

<u>310734</u>

Ein erster Beweisteil (z.B. Teilbarkeit durch 4 oder Schluß auf die Formen 6n-1, 6n+1) 3

Abschließende Herleitung der Teilbarkeit durch 12 3

6

<u>310735</u>

Herleitung einer Inhaltsgleichheit (z.B. $J_1 = J_2$) 3

Weitere Herleitung von $J_1 = \cdots = J_6$ und damit $F_1 : F_2 = 3:2$ 3

6

<u>310736</u>

Ersichtliche Nutzung der Relation zwischen Radien und Mittelpunktsabstand bei sich berührenden Kreisen 2

Hiermit Herleitung einer der nachzuweisenden (oder im weiteren zu nutzenden) Gleichheiten 2

Herleitung weiterer Gleichheiten, darunter auch $u = 2r_1$ 3

7