

310721

Matthias, Thomas, Frank und Sven haben im Hof bei den Wohnhäusern Fußball gespielt. Eine Fensterscheibe ging zu Bruch; genau einer der vier Jungen hat sie mit seinem mißglückten Torschuß zerschlagen. Sie machen nun folgende Aussagen:

Matthias: Es war Thomas oder Frank, der die Scheibe zerschlug.

Thomas: Ich war es nicht.

Frank: Ich auch nicht.

Sven: Frank hat es getan.

Rolf, der alles beobachtet hat, stellt fest, daß mindestens drei dieser vier Aussagen wahr sind.

Untersuche, ob durch Rolfs Feststellung, wenn sie wahr ist, eindeutig bestimmt ist, wer die Scheibe zerschlug! Wenn das der Fall ist, ermittle diesen Täter!

310722

Susann will die Summe s aller derjenigen vierstelligen natürlichen Zahlen berechnen, die durch 4 teilbar sind. Tamara ermittelt die Summe t aller derjenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.

a) Sind s und t einander gleich oder, wenn nicht, welche der beiden Zahlen ist die größere?

b) Welchen Betrag hat die Differenz zwischen s und t ? Begründe deine Antworten!

310723

a) Zeichne ein Parallelogramm ABCD, in dem die Seitenlängen

$\overline{AB} = 5 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 3 \text{ cm}$ betragen und der Winkel \sphericalangle BAD die Größe $\alpha = 50^\circ$ hat! Errichte über den Seiten AD und DC die Quadrate ADPQ und DCRS so, daß diese Quadratflächen vollständig außerhalb der Parallelogrammfläche liegen!

b) Beweise, daß, für jedes Parallelogramm ABCD, bei dem \sphericalangle BAD kleiner als 90° ist, nach dem Konstruieren solcher Quadrate die Strecken BQ und BR einander gleichlang sind und aufeinander senkrecht stehen!

310724

a) Konstruiere ein Fünfeck ABCDE, in dem die Seitenlängen

$\overline{AB} = 50 \text{ mm}$, $\overline{BC} = 45 \text{ mm}$, $\overline{AE} = 54 \text{ mm}$

betragen und die Innenwinkel

\sphericalangle BAE, \sphericalangle ABC, \sphericalangle BCD, \sphericalangle AED

in dieser Reihenfolge die Größen

$\alpha = 100^\circ$, $\beta = 110^\circ$, $\gamma = 106^\circ$, $\epsilon = 114^\circ$

haben!

b) Konstruiere nun zwei Punkte F und G, die so auf der Geraden durch A und B liegen, daß das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck ABCDE hat!

Beschreibe deine Konstruktion der Punkte F und G! Beweise, daß von den nach deiner Beschreibung konstruierten Punkten die geforderten Bedingungen erfüllt werden!

310721 Lösung:

8 Punkte

In der folgenden Tabelle wird für jede der vier Möglichkeiten des Täters angegeben, welche der vier Aussagen wahr (w) und welche falsch (f) sind:

Täter	Wahrheitswert der Aussage von			
	Mattias	Thomas	Frank	Sven
Matthias	f	w	w	f
Thomas	w	f	w	f
Frank	w	w	f	w
Sven	f	w	w	f

Nur dann, wenn Frank der Täter war, sind mindestens drei der Aussagen wahr. Also ist durch diese Voraussetzung eindeutig bestimmt, daß nur Frank die Scheibe zerschlagen haben kann.

Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht darin, die folgenden vier Annahmen als widerspruchsvoll nachzuweisen:

(1) Alle vier Aussagen sind wahr.

(2)/(3)/(4) Genau Matthias'/Thomas'/Svens Aussage ist falsch.

310722 Lösung:

11 Punkte

s ist die Summe der Zahlen 1000, 1004, ..., 9996 ; t ist die Summe der Zahlen 1002, 1006, ..., 9998 .

- a) Aus jedem Summanden in s entsteht durch Vergrößerung um 2 ein Summand in t, und dabei entsteht jeder Summand in t genau einmal. Also enthalten beide Summen gleich viele Summanden. Ferner ist jeder Summand in t größer als der entsprechende Summand in s. Daher ist t größer als s.
- b) Der Unterschied zwischen dem ersten und letzten Summanden beträgt in beiden Summen 8996, die Summanden folgen im Abstand 4 aufeinander. Die Anzahl der Summanden beträgt (in jeder der beiden Summen) daher $8996:4 + 1 = 2250$. Hieraus und weil jeder Summand in t um 2 größer als der entsprechende Summand in s ist, folgt: Die Differenz zwischen s und t hat den Betrag

$$2250 \cdot 2 = 4500 .$$

Bemerkungen: 1. Die Ermittlung der Summandenanzahl kann z.B. auch so dargestellt werden, daß man die Summanden in der Form

$$996 + 1 \cdot 4, 996 + 2 \cdot 4, \dots, 996 + 2250 \cdot 4$$

schreibt und sie dann mit Hilfe der bei 4 stehenden Faktoren 1, 2, ..., 2250 abgezählt denkt.

2. Beginnt man mit dem Nachweis zu b), so erhält man dabei auch die für a) zu beweisende Aussage $t > s$, und auf eine gesonderte Darstellung von - für b) noch nicht ausreichenden - Argumenten zu a) kann verzichtet werden.

310723 Lösung:

10 Punkte

- a) Abb. L 310723 zeigt eine geforderte Zeichnung.
 b) Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{DC} && \text{(Gegenseiten im Parallelogramm ABCD)} \\ &= \overline{CR} && \text{(Seiten im Quadrat DCRS)} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} \overline{AQ} &= \overline{DA} && \text{(Seiten im Quadrat ADPQ)} \\ &= \overline{CB} && \text{(Gegenseiten im Parallelogramm ABCD)}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Für } \angle BAD = \alpha < 90^\circ \text{ gelten die Gleichungen}$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \alpha \quad (3)$$

$$\text{und } \angle BCD = \alpha, \quad \text{(Winkel im Parallelogramm),}$$

$$\text{wegen } \angle QAD = \angle DCR = 90^\circ \quad \text{(Winkel in Quadraten)}$$

$$\text{also } \angle QAB = \angle BCR = 90^\circ + \alpha. \quad (4)$$

Aus (1), (2), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws

$$\triangle ABQ \cong \triangle CRB,$$

$$\text{also } \overline{BQ} = \overline{RB}, \quad (5)$$

$$\angle ABQ = \angle CRB = \varphi, \quad (6)$$

$$\angle AQB = \angle CBR = \psi. \quad (7)$$

Nach (4), (6), (7) folgt aus dem Innenwinkelsatz

$$\alpha + \varphi + \psi = 90^\circ; \quad (8)$$

aus (3), (6), (7) und (8) folgt

$$\angle QBR = 180^\circ - \alpha - \varphi - \psi = 90^\circ. \quad (9)$$

Mit dem Nachweis von (5) und (9) ist der verlangte Beweis geführt.

310724 Lösung:

11 Punkte

- a) Abb. L 310724 enthält ein zu konstruierendes Fünfeck ABCDE.
 b) Die Abbildung enthält auch eine Konstruktion zweier Punkte F, G.
 Beschreibung dieser Konstruktion:

(1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD; sie schneidet die Gerade durch A und B in F.

(2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD; sie schneidet die Gerade durch A und B in G.

Beweis, daß für die so auf der Geraden durch A und B konstruierten Punkte F, G das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck ABCDE hat:

Nach (1) gilt $EF \parallel AD$. Daher haben in den Dreiecken ADE und ADF die zu AD senkrechten Höhen dieselbe Länge. Also haben diese Dreiecke einander gleichen Flächeninhalt. Ebenso folgt aus (2), daß die Dreiecke BDC und BDG einander gleichen Flächeninhalt haben. Damit ergibt sich¹⁾

$$\begin{aligned} A(\text{FGD}) &= A(\text{ABD}) + A(\text{ADF}) + A(\text{BDG}) \\ &= A(\text{ABD}) + A(\text{ADE}) + A(\text{BDC}) = A(\text{ABCDE}), \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Bemerkung: Die geforderten Bedingungen werden auch von jeder anderen auf der Geraden durch A und B liegenden, zur oben konstruierten Strecke FG gleichlangen Strecke erfüllt.

¹⁾ Ist \mathcal{P} ein Polygon, so bezeichne $A(\mathcal{P})$ seinen Flächeninhalt

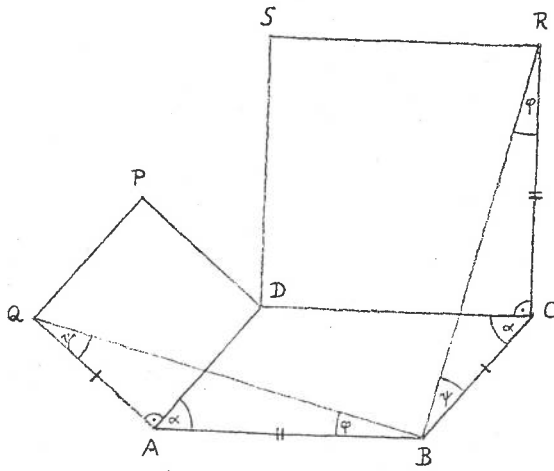


Abb. L 310723

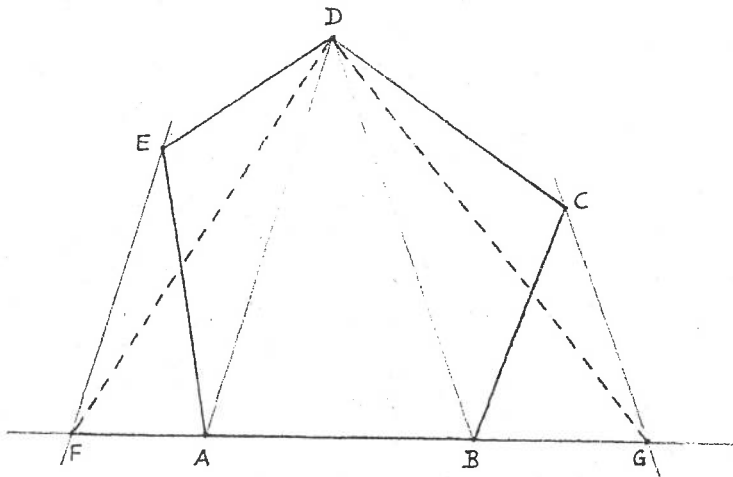


Abb. L 310724

310721

Ausführung einer wesentlichen Argumentation (z.B. Ermittlung der Wahrheitswerte bei den vier Möglichkeiten des Täters) ... 5
Abschließende Herleitung des Ergebnisses 3

310722

a) Herleitung von $t > s$ 3
b) Herleitung von $|t - s| = 4500$, dabei
Nutzg.v.Eigenschaften d.Summanden (Diff.2, Anzahl 2250) ... 5
Abschließende Herleitung der Differenz 3
[Je nach Gestaltung des Lösungsweges können hier zu b) genannte Punktanteile auch in a) vergeben werden.]

310723

a) Genaue und saubere Ausführung der Zeichnung 3
b) Herleitung einer wesentlichen Aussage (z.B. $ABQ \cong CRB$) 2
Abschließender Beweis zu $\underline{BQ} = \underline{BR}$ 2
" " " $\sphericalangle QBR = 90^\circ$ 3

310724

a) Konstruktion des Fünfecks 10
b) Ausführung des Konstruktion von F und G 2
Beschreibung der Konstruktion 3
Nachweis der Flächengleichheit von FGD mit ABCDE 3