XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

301231

a) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a,b,c,d stets

$$\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leqq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$$

gilt.

b) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a,b,c,d stets

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$$

gilt.

301232

Im Raum seien n Punkte ($n \geqq 3$) so gelegen, daß sich unter je drei dieser Punkte stets mindestens zwei befinden, die zueinander einen Abstand kleiner als 1 haben.

Man beweise, daß es unter dieser Voraussetzung stets zwei Kugelkörper K_1 und K_2 vom Radius 1 geben muß, so daß jeder der n Punkte (mindenstens) einem der beiden Kugelkörper K_1, K_2 angehört.

Bemerkung: Jeder Kugelkörper werde hier ohne seinen Rand (die Kugelfläche) verstanden.

Von den nachfolgenden Aufgaben 301233 A und 301233 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

301233 A

Man ermittle alle diejenigen siebzehnstelligen natürlichen Zahlen n, für deren 17 Ziffern $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Es gilt $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_{17}$.

(2) Für die Summe $s = x_1 + x_2 + \ldots x_{17}$ und das Produkt

$p = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{17}$ gilt $s = p$.

Hinweis: Die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_{17}$ entspreche der üblichen Schreibweise; es bezeichne also x_{17} die Einer-, x_{16} die Zehnerziffer usw.

301233 B

Es seien $D_1, \ldots, D_n$ Dosen, für deren Größen (Durchmesser) $d_1, \ldots, d_n$ in geeigneter Maßeinheit

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 3, \quad \ldots, \quad d_n = n+1$$

gelte. Weiter seien $G_1, \ldots, G_n$ Gegenstände, für deren Größen $g_1, \ldots, g_n$

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \ldots, \quad g_n = n$$

gelte. Dabei seien die Größen so abgestimmt, daß jeweils gilt:

Genau dann, wenn $g_i \leqq d_j$ ist, paßt G_i in D_j.

Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Anzahl $A(n)$ aller derjenigen Verteilungen der Gegenstände in die Dosen, bei denen in jeder Dose genau ein Gegenstand liegt!

Hinweis: Zwei Verteilungen heißen genau dann verschieden voneinander, wenn mindestens ein Gegenstand bei einer dieser beiden Verteilungen in einer anderen Dose liegt als bei der anderen Verteilung.

A 11/12;II

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

301234

Man beweise:

In jedem n-Eck ($n \geq 3$) gibt es mindestens zwei verschiedene Seiten des n-Ecks, für deren Längen a, b die Ungleichung $b < 2a$ gilt.

301235

Man untersuche, ob die durch

$$x_1 = 1,$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} \qquad (n = 1,2,3,...)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist, und ermittle, wenn das der Fall ist, ihren Grenzwert.

301236

Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist.

30 11 94-1

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

301231) Lösung: 6 Punkte

a) Für beliebige positive reelle Zahlen a,b,c,d gilt stets die genannte Ungleichung. Beweis: Es gilt stets

$$0 \leqq (ad - bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2.$$

Hieraus folgt der Reihe nach

$$4abcd \leqq a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 = (ad + bc)^2,$$

$$2\sqrt{abcd} \leqq ad + bc,$$

$$ac + bd + 2\sqrt{abcd} \leqq ac + ad + bc + bd,$$

$$(\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2 \leqq (a + b)(c + d)$$

und damit die genannte Ungleichung.

b) Um nachzuweisen, daß die genannte Ungleichung für positive reelle Zahlen a,b,c,d nicht stets gilt, genügt die Angabe eines Gegenbeispiels. Ein solches bilden z. B. $a = b = 2$, $c = d = 1$, da für diese Werte $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} = 3 > 2\sqrt{2} = \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$ gilt.

Bemerkung: Man beachte insbesondere, daß im Beweis zu a) aus der Darstellung ersichtlich sein muß, in welcher logischen Schlußrichtung vorgegangen wird (entweder wie oben von einer stets wahren Aussage auf die zu beweisende Ungleichung oder, was auch möglich ist, durch indirekten Beweis von der Annahme $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} > \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$ auf den Widerspruch $0 > (ad - bc)^2$).

301232) Lösung: 6 Punkte

Unter den endlich vielen Abständen je zweier der n Punkte zueinander gibt es einen größtmöglichen Abstand d. Es seien etwa P_1 und P_2 zwei der n Punkte mit $\overline{P_1P_2} = d$. Man kann nun beweisen, daß die beiden Kugelkörper K_1, K_2 mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt P_1 bzw. P_2 die behauptete Eigenschaft haben:

P_1 liegt in K_1, und P_2 liegt in K_2; für jeden weiteren Punkt P der n gegebenen Punkte gilt:

1. Falls $\overline{P_1P_2} < 1$ ist, so ist aufgrund der Auswahl der beiden Punkte P_1, P_2

$$\overline{PP_1} \leqq \overline{P_1P_2} < 1. \qquad (1)$$

2. Falls aber $\overline{P_1P_2} \geqq 1$ ist, folgt nach Voraussetzung über die n Punkte, daß

$$\left.\begin{array}{l}\text{mindestens eine der Ungleichungen}\\ \overline{PP_1} < 1, \quad \overline{PP_2} < 1\end{array}\right\} \qquad (2)$$

gelten muß.

Sowohl aus (1) als auch aus (2) folgt aber, daß P in (mindestens) einem der beiden Kugelkörper K_1, K_2 liegt.

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

<u>301233 A)Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

I. Wenn n die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:

Da n siebzehnstellig ist, gilt $x_1 > 0$, wegen $x_i \geqq 0$ $(i=2,...,17)$ also $s > 0$, d. h. $p > 0$, also sind alle $x_i > 0$ $(i = 1,...,17)$.

Da alle $x_i \leqq 9$ sind, ist $s \leqq 17\cdot 9 = 153$. Wäre $x_8 \geqq 2$, also $x_i \geqq 2$ $(i = 1,...,8)$, so wäre $p \geqq 2^8 = 256 > s$. Also ist $x_8 = 1$ und damit wegen (1)

$$x_{17} = x_{16} = ... = x_8 = 1, \qquad (3)$$

$s \leqq 7\cdot 9 + 10\cdot 1 = 73$. Wäre $x_7 \geqq 2$, so folgte entsprechend $p \geqq 2^7 = 128 > s$. Also ist

$$x_7 = 1, \qquad (4)$$

$s \leqq 6\cdot 9 + 11\cdot 1 = 65$. Wäre $x_4 \geqq 3$, so folgte $p \geqq 3^4 = 81 > s$. Also ist $x_4 \leqq 2$ und damit

$$x_6 \leqq x_5 \leqq x_4 \leqq 2, \qquad (5)$$

$s \leqq 3\cdot 9 + 3\cdot 2 + 11\cdot 1 = 44$. Wäre $x_3 \geqq 4$, so folgte $p \geqq 4^3 = 64 > s$. Also ist

$$x_3 \leqq 3, \qquad (6)$$

$s \leqq 2\cdot 9 + 1\cdot 3 + 3\cdot 2 + 11\cdot 1 = 38$. Wäre $x_2 \geqq 7$, so folgte $p \geqq 7^2 = 49 > s$. Also ist (6)

$$x_2 \leqq 6, \qquad (7)$$

$s \leqq 1\cdot 9 + 1\cdot 6 + 1\cdot 3 + 3\cdot 2 + 11\cdot 1 = 35$.

Wegen $x_i \geqq 1$ $(i = 1,...,17)$ gilt andererseits $s \geqq 17$.

Ferner enthält $s = p$ als Produkt der $x_i \leqq 9$ keine anderen Primfaktoren als 2,3,5,7. Daher kann $s = p$ nur eine der Zahlen

18,20,21,24,25,27,28,30,32,35

sein, und zwar gibt es für eine Darstellung $p = x_1 \cdot ... \cdot x_{17}$ dieser Zahlen wegen $x_i \leqq 9$ und (1) nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle:

p	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 ... x_{17}	s
18	9	2	1	1	1	1 ... 1	26
	6	3	1	1	1	1 ... 1	24
	3	3	2	1	1	1 ... 1	22
20	5	4	1	1	1	1 ... 1	24
	5	2	2	1	1	1 ... 1	23
21	7	3	1	1	1	1 ... 1	25
24	8	3	1	1	1	1 ... 1	26
	6	4	1	1	1	1 ... 1	25
	6	2	2	1	1	1 ... 1	$\boxed{24}$
	4	3	2	1	1	1 ... 1	23
	3	2	2	2	1	1 ... 1	22
25	5	5	1	1	1	1 ... 1	$\boxed{25}$
27	9	3	1	1	1	1 ... 1	$\boxed{27}$
	3	3	3	1	1	1 ... 1	23
28	7	4	1	1	1	1 ... 1	26
	7	2	2	1	1	1 ... 1	25
30	6	5	1	1	1	1 ... 1	26
	5	3	2	1	1	1 ... 1	24
32	8	4	1	1	1	1 ... 1	27
	8	2	2	1	1	1 ... 1	26
	4	4	2	1	1	1 ... 1	24
	4	2	2	2	1	1 ... 1	23
	2	2	2	2	2	1 ... 1	22
35	7	5	1	1	1	1 ... 1	27

Von diesen Möglichkeiten scheiden alle nicht hervorgehobenen aus, da sie nicht s = p erfüllen.

II. Zugleich sind für die hervorgehobenen Werte die Bedingungen (1) und (2) bestätigt.

Somit erfüllen genau die siebzehnstelligen Zahlen

622111111111111111, 55111111111111111, 93111111111111111

die geforderten Bedingungen.

301233 B) Lösung: 8 Punkte

Behauptung: Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ gilt $A(n) = 2^{n-1}$. Beweis:

I. Es gilt $A(1) = 1$. Beweis hierzu: Für eine Dose D_1 (der Größe 2) und einen Gegenstand G_1 (der Größe 1) gibt es genau die eine Verteilung, G_1 in D_1 zu legen.

II. Für jede natürliche Zahl $k \geqq 1$ gilt: Wenn $A(k) = 2^{k-1}$ ist, dann ist $A(k+1) = 2^k$. Beweis hierzu: Es sei $A(k) = 2^{k-1}$ vorausgesetzt, d. h., es gebe genau 2^{k-1} Verteilungen von Gegenständen der Größen $1,\ldots,k$ in Dosen der Größen $2,\ldots,k+1$.

Liegen nun Gegenstände $G_1,\ldots,G_{k+1}$ der Größen $1,\ldots,k+1$ und Dosen $D_1,\ldots,D_{k+1}$ der Größen $2,\ldots,k+2$ vor, so gibt es zwei Arten von Verteilungen dieser G_i in die D_j:

a) Die 1. Art enthält alle diejenigen Verteilungen, bei denen G_{k+1} in D_{k+1} liegt. Bei diesen Verteilungen sind $G_1,\ldots,G_k$ in $D_1,\ldots,D_k$ verteilt; die Anzahl dieser Verteilungen ist nach Voraussetzung über $A(k)$ gleich 2^{k-1}.

b) Die 2. Art enthält alle diejenigen Verteilungen, bei denen G_{k+1} nicht in D_{k+1} liegt. Bei diesen Verteilungen muß G_{k+1} in D_k liegen, da G_{k+1} in alle D_j mit $j < k$ wegen $d_j = j+1 < k+1 = g_{k+1}$ nicht hineinpaßt. Also ist die Anzahl aller Verteilungen der 2. Art gleich der Anzahl aller möglichen Verteilungen von $G_1,\ldots,G_{k-1}$, G_k in $D_1,\ldots,D_{k-1},D_{k+1}$. An deren Anzahl ändert sich nichts, wenn man die Größe $k+2$ von D_{k+1} durch $k+1$ ersetzt; denn sowohl für die Größe $k+2$ als auch für die Größe $k+1$ gilt, daß sie größer als alle Gegenstandsgrößen $1,\ldots,k$ ist. Somit ist auch die Anzahl aller Verteilungen 2. Art nach der Voraussetzung über $A(k)$ gleich 2^{k-1}.

Da schließlich jede Verteilung 1. Art von jeder Verteilung 2. Art verschieden ist, ist folglich insgesamt $A(k+1) = 2^{k-1}+2^{k-1} = 2^k$.

Mit I. und II. ist für alle natürlichen Zahlen n die Behauptung $A(n) = 2^{n-1}$ durch vollständige Induktion bewiesen.

XXX. Olympiade Junger Mathematiker
3. Stufe
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

301234) Lösung: 6 Punkte

Für jedes n-Eck ($n \geqq 3$) und die Längen $a_1, \ldots, a_n$ seiner verschiedenen Seiten gilt: Gäbe es kein Paar verschiedener Seiten, deren Längen a, b die Ungleichung $b < 2a$ erfüllen würden, so müßten die Ungleichungen

$$a_1 \geqq 2a_2, \quad a_2 \geqq 2a_3, \ldots, \quad a_{n-1} \geqq 2a_n, \quad a_n \geqq 2a_1$$

gelten. Daraus ergäbe sich der Reihe nach

$$a_1 \geqq 2 \cdot (2a_3) = 2^2 \cdot a_3,$$

$$a_1 \geqq 2^2 \cdot (2a_4) = 2^3 \cdot a_4,$$

....

$$a_1 \geqq 2^{n-2} \cdot (2a_n) = 2^{n-1} \cdot a_n,$$

$$a_1 \geqq 2^{n-1} \cdot (2a_1) = 2^n \cdot a_1.$$

Wegen $n \geqq 3$, also $2^n > 1$, steht dies im Widerspruch gegen die für jede Seitenlänge des n-Ecks geltende Ungleichung $a_1 > 0$.
Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Bemerkung: Eine wie oben angegebene aufzählungsartige Darstellung statt einer Beweisführung durch vollständige Induktion kann hier akzeptiert werden. Wie übrigens der Beweis zeigt, gilt sogar: Für je $n \geqq 2$ positive reelle Zahlen gibt es bei jeder Wahl einer zyklisch sich schließenden Anordnung dieser Zahlen ein Paar (a,b), worin a eine dieser Zahlen und b ihr in der Anordnung nachfolgender Nachbar ist und worin die Ungleichung $b < 2a$ gilt.

301235) Lösung: 7 Punkte

Die Gleichung $g = \frac{1}{g+1}$ ist äquivalent mit $g(g+1) = 1$, d. h. $g^2 + g - 1 = 0$; diese hat genau die zwei Lösungen $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, von denen genau eine, nämlich $g = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, positiv ist. Für sie gilt

$$|x_{n+1} - g| = \left|\frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{g+1}\right| = \frac{|g - x_n|}{|x_n + 1|\,|g + 1|} \,. \qquad (1)$$

Durch vollständige Induktion (da $x_1 > 0$ ist und aus $x_n > 0$ stets $x_n + 1 > 0$, also $x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} > 0$ folgt) erhält man $x_n > 0$ für alle $n = 1,2,3,\ldots$. Ferner ist $g + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{3}{2}$.

Damit ergibt sich aus (1)

$$|x_{n+1} - g| \leqq \frac{2}{3}\cdot|x_n - g| \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Durch vollständige Induktion erhält man hieraus

$$|x_{n+1} - g| \leqq (\tfrac{2}{3})^n\cdot|x_1 - g| \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$ folgt damit $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - g) = 0$, d. h.:

Die Folge (x_n) ist konvergent; sie hat den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

<u>2. Lösungsweg:</u>

Durch vollständige Induktion zeigt man

$$0 < x_n \leqq 1 \quad (n = 1,2,3,\ldots). \tag{2}$$

Für die Folgen der $a_k = x_{2k-1}$ und $b_k = x_{2k}$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ gilt

$$a_{k+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_k + 1} + 1} = \frac{a_k + 1}{a_k + 2} = 1 - \frac{1}{a_k + 2} \quad \text{und ebenso}$$

$$b_{k+1} = 1 - \frac{1}{b_k + 2}.$$

Mit $a_2 = \frac{2}{3} < 1 = a_1$ und dem Schluß, daß aus $a_{k+1} < a_k$ stets

$a_{k+2} = 1 - \frac{1}{a_{k+1} + 2} < 1 - \frac{1}{a_k + 2} = a_{k+1}$ folgt, ist durch vollständige Induktion (a_k) als fallend nachgewiesen; ebenso (b_k) mit $b_2 = \frac{3}{5} > \frac{1}{2} = b_1$ und dem entsprechenden Schluß von $b_{b+1} > b_k$ auf $b_{k+2} > b_{k+1}$ als steigend. Daher und wegen (2) sind (a_k) und (b_k) konvergent. Ihre Grenzwerte erfüllen $g \geqq 0$ und $g = \frac{g + 1}{g + 2}$, also $g^2 + g - 1 = 0$. Somit haben (a_k) und (b_k) den gemeinsamen Grenzwert $g = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$; dieser ist folglich auch der Grenzwert von (x_n).

<u>Bemerkung:</u> Berechnet man die ersten Glieder $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$ der Folge (x_n), so kann man vermuten, daß alle x_n durch Brüche dargestellt werden können, in denen Zähler und Nenner aufeinanderfolgende Glieder der Fibonaccischen Zahlenfolge sind. Wenn diese Vermutung bewiesen wird, können bekannte Aussagen über die Fibonaccischen Zahlen zur Lösung der Aufgabe herangezogen werden. Ähnlich wäre auch das Zitieren von bekannten Sachverhalten über unendliche Kettenbrüche denkbar.

301236) Lösung: 7 Punkte

Die Reste r, die die Zahlen 2^n ($n = 0,1,2,\ldots$) bei Division durch 25 lassen, kann man finden, indem man ausgehend von $2^0 = 1$ jeweils verdoppelt und gegebenenfalls durch Subtraktion von 25 auf das Intervall $0 \leqq r < 25$ reduziert. So findet man: Die Zahlen 2^n lassen für $n = 0,1,2,\ldots$ der Reihe nach bei Division durch 25 die Reste

1, 2, 4, 8, 16, 7, 14, 3, 6, 12,
24, 23, 21, 17, 9, 18, 11, 22, 19, 13, 1, ...

die sich hiernach periodisch mit der Periode 20 wiederholen müssen.[1]

Ferner haben die Zahlen n^2 ($n = 0,1,2,\ldots$) $\left[\text{wegen } (n+25)^2 = n^2 + 25\cdot(2n+25)\right]$ bei Division durch 25 Reste, die sich ebenso wie die Reste von n mit der Periode 25 wiederholen.

Also haben die Zahlen $2^n + n^2$ bei Division durch 25 Reste, die sich mit der Periode 100 (als gemeinsamem Vielfachen der Perioden 20 und 25) wiederholen. Da nun $2^6 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ bei Division durch 25 den Rest 0 läßt, gilt das somit für alle $2^n + n^2$ mit

$$n = 6 + k\cdot 100 \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Für diese n gilt außerdem: Wegen $n \geqq 2$ ist 2^n durch 4 teilbar, wegen $2|n$ ist n^2 durch 4 teilbar; also ist $2^n + n^2$ durch 4 teilbar.

Damit folgt: Für unendlich viele n, nämlich für alle $n = 6 + k\cdot 100$ ($k = 0,1,2,\ldots$), ist $2^n + n^2$ durch das kleinste gemeinsame Vielfache von 25 und 4, d. h. durch 100 teilbar.

---

1 Läßt man auch negative Reste zu (etwa durch Wahl des Intervalls $-12 \leqq r < 13$), so erspart dies weitere Einzelberechnungen nach Erreichen des elften Restes -1.

Bemerkung: Man kann die Periodizität der Reste $2^n \bmod 25$ auch (ohne Angabe der Periodenlänge) mit Hilfe des Schubfachschlusses begründen. Die Existenz einer Periode der Reste $2^n + n^2 \bmod 25$ folgt dann als Existenz eines gemeinsamen Vielfachen mit der Periodenlänge 25 der Reste $n^2 \bmod 25$.