XXX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

301221

Man beweise die folgende Aussage:
Wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind, für die

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \qquad (1)$$

gilt, dann gilt auch stets

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}. \qquad (2)$$

301222

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x und y, die dem System der folgenden Ungleichungen (1) und (2) genügen:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \qquad (1)$$
$$4x + 2y > 5. \qquad (2)$$

301223

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}. \qquad (1)$$

Hinweis: Für jede natürliche Zahl $q \geqq 2$ bezeichnet $q!$ wie üblich das Produkt aller derjenigen natürlichen Zahlen i, für die $1 \leqq i \leqq q$ gilt.

A 11/12
301224

Ist ABC ein Dreieck, so bezeichne S den Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden, ferner sei mit U, V bzw. W der Fußpunkt des von S auf die Seite BC, CA bzw. AB gefällten Lotes bezeichnet, und J(ABC) bzw. J(UVW) bezeichne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. UVW.

Man beweise mit diesen Bezeichnungen, daß das Verhältnis

$$r = J(UVW) : J(ABC)$$

in allen rechtwinkligen Dreiecken ABC denselben Wert hat und ermittle diesen Wert r.

XXX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

301221) Lösung: 8 Punkte

Für positive reelle a, b, c gilt mit der Abkürzung $N = (a + b)(a + c)(b + c)$ stets

$$\frac{2}{a+c} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{N}\cdot(2(a+b)(b+c) - (a+c)(a+2b+c))$$

$$= \frac{1}{N}\cdot(2b^2-a^2-c^2). \qquad (3)$$

Aus (1) folgt: Die rechte Seite von (3) ist gleich Null, also auch die linke Seite; hieraus folgt (2), w.z.b.w.

301222) Lösung: 10 Punkte

Die Ungleichung (1) ist äquivalent zu

$$2(x-3)^2 + 2(y+5)^2 < 3, \qquad (3)$$

also dazu, daß die Zahlen

$$u = x - 3,\ v = y + 5 \qquad (4)$$

die Ungleichung

$$2u^2 + 2v^2 < 3 \qquad (5)$$

erfüllen. Für ganzzahlige x, y sind u^2, v^2 natürliche Zahlen mit $u^2, v^2 \leqq 1$ oder $u^2, v^2 \geqq 4$, und mit solchen wird (5) genau dann erfüllt, wenn $(u^2; v^2)$ eines der Paare (0; 0), (0; 1), (1; 0) ist. Hierzu ist äquivalent, daß (u; v) eines der Paare

$$(0; 0),\ (0; 1),\ (0; -1),\ (1; 0),\ (-1; 0)$$

ist. Nach (4), also

$$x = u + 3,\ y = v - 5,$$

gilt dies genau dann, wenn $(x; y)$ eines der Paare

$$(3; -5),\ (3; -4),\ (3; -6),\ (4; -5),\ (2; -5) \qquad (6)$$

ist.

Von den Paaren (6) erfüllt genau das Paar

$$(4; -5)$$

die Ungleichung (2). Also erfüllt unter allen Paaren $(x; y)$ ganzer Zahlen genau dieses das Ungleichungssystem (1), (2).

Möglich ist auch eine mehr anschauliche Lösungsdarstellung:
Die Kreisfläche aller Punkte, deren Koordinaten $(x; y)$ die Ungleichung (3) erfüllen, hat den Radius $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$; für ihn gilt $1 < r < \sqrt{2}$. Von den fünf Punkten (Koordinaten in (6)), die dieser Kreisfläche angehören und ganzzahlige Koordinaten haben (siehe Abb. L 301222), liegt nur der mit den Koordinaten $(4; -5)$ auch in der Halbebene aller Punkte, deren Koordinaten die Ungleichung (2), d. h. $y > -2x + \frac{5}{2}$, erfüllen.

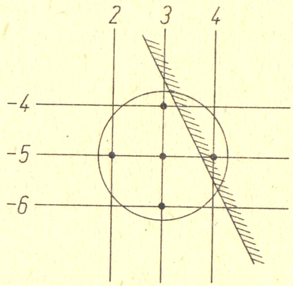


Abb. L 301222

301223) Lösung: **11 Punkte**

Der geforderte Beweis kann durch vollständige Induktion geführt werden:

I. Induktionsanfang: Die Ungleichung (1) gilt für $n = 2$. Beweis hierzu:
Es gilt

$$\frac{4!}{(2!)^2} = \frac{24}{4} = 6 > \frac{16}{3}.$$

II. Induktionsschritt: Für jede natürliche Zahl $k \geqq 2$ folgt aus der Induktionsvoraussetzung, die Ungleichung (1) gelte für $n = k$, daß (1) auch für $n = k + 1$ gilt. Beweis hierzu, d. h. dazu, daß aus $k \geqq 2$ und

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} > \frac{4^k}{k+1} \qquad (2)$$

stets

$$\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} > \frac{4^{k+1}}{(k+1)+1} \qquad (3)$$

folgt:

Für die Zahlen auf den beiden Seiten der Ungleichung (3) gilt einerseits

$$\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} = \frac{(2k+2)!}{(k!(k+1))^2} = \frac{(2k)! \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)}{(k!)^2 \cdot (k+1)^2}$$
$$= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1}, \qquad (4)$$

andererseits

$$\frac{4^{k+1}}{(k+1)+1} = \frac{4^k \cdot 4}{k+2} = \frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2}. \qquad (5)$$

Ferner kann man zeigen, daß zwischen den in (4) und (5) ersichtlichen Faktoren die Ungleichung

$$\frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1} > \frac{4(k+1)}{k+2} \qquad (6)$$

gilt: Es gilt nämlich

$$(2k+1)(k+2) = 2k^2 + 5k + 2$$
$$> 2k^2 + 4k + 2 = 2(k+1)^2, \qquad (7)$$

und wegen $(k+1)(k+2) > 0$ folgt hieraus (6).

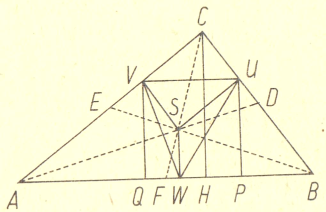
Nach (4) folgt nun aus der Induktionsvoraussetzung (2), indem man noch (6) und (5) anwendet, die in (3) behauptete Ungleichung:

$$\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1}$$
$$> \frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1} > \frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2}$$
$$= \frac{4^{k+1}}{(k+1)+1}.$$

Mit I. und II. ist (1) für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ bewiesen.

<u>Bemerkung:</u> Man beachte, daß zu einer korrekten Durchführung des Induktionsschrittes nicht nur die (oben in (4) bis (7) enthaltene) rechnerische Ausführung gehört, sondern daß auch aus der Darstellung ersichtlich sein muß, in welcher Reihenfolge des logischen Schließens die einzelnen Ungleichungen auseinander hervorgehen (beispielsweise, daß man von (7) auf (6) - und nicht umgekehrt - und dann von (2) vermittels (6) auf (3) schließt).

301224) Lösung: **11 Punkte**



Es sei ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, o.B.d.A. mit dem rechten Winkel bei C.
Wie üblich sei $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$. Ferner seien CH, UP, VQ die Lote von C, U, V auf AB, und es sei $h = \overline{CH}$, $p = \overline{HB}$, $q = \overline{HA}$.
Für jedes Dreieck XYZ bezeichne J(XYZ) seinen Flächeninhalt.

Abb. L 301224

Für den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden AD, BE und CF gilt bekanntlich

$$\overline{SD} = \frac{1}{3}\,\overline{AD},\quad \overline{SE} = \frac{1}{3}\,\overline{BE},\quad \overline{SF} = \frac{1}{3}\,\overline{CF}.$$

Da nach Voraussetzung $SU \parallel AC$, $SV \parallel BC$, $SW \parallel CH$ ist, folgt aus dem Strahlensatz

$$\overline{SU} = \frac{b}{3},\quad \overline{SV} = \frac{a}{3},\quad \overline{SW} = \frac{h}{3}.$$

Nach Voraussetzung ist ferner CVSU ein Rechteck, also ist auch

$$\overline{CV} = \frac{b}{3},\quad \overline{CU} = \frac{a}{3};$$

wegen $UP \parallel CH$ und $VQ \parallel CH$ folgt somit nach dem Strahlensatz

$$\overline{HP} = \frac{p}{3},\quad \overline{HQ} = \frac{q}{3}.$$

Damit erhält man

$$J(SUV) = \frac{1}{2}\,\overline{SU}\cdot\overline{SV} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\,ab = \frac{1}{9}\,J(ABC), \qquad (1)$$

$$J(SWU) = \frac{1}{2}\,\overline{SW}\cdot\overline{WP},\quad J(SWV) = \frac{1}{2}\,\overline{SW}\cdot\overline{WQ},$$

$$J(SWU) + J(SWV) = \frac{1}{2}\,\overline{SW} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdot (\overline{HP} + \overline{HQ})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{p+q}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}\,hc =$$
$$= \frac{1}{9}\,J(ABC). \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt schließlich

$$J(UVW) = J(SUV) + J(SWU) + J(SWV) = \frac{2}{9}\,J(ABC).$$

Damit ist bewiesen, daß sich für alle rechtwinkligen Dreiecke der Wert $r = 2 : 9$ ergibt.

2. Lösungsweg:

In einem geeigneten Koordinatensystem haben A, B, C die Koordinaten $(b;\ 0)$, $(0;\ a)$, $(0;\ 0)$. Der Schwerpunkt S hat dann die Koordinaten $(\frac{b}{3};\ \frac{a}{3})$.

Die Lotfußpunkte U, V haben die Koordinaten $(0;\ \frac{a}{3})$, $(\frac{b}{3};\ 0)$. Die Gerade durch A und B hat

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \qquad (3)$$

als Gleichung, das Lot von S auf sie hat daher

$$\frac{x - \frac{b}{3}}{a} - \frac{y - \frac{a}{3}}{b} = 0 \qquad (4)$$

als Gleichung, und die Koordinaten des Lotfußpunktes W ergeben sich als Lösung $(x;\ y)$ des Gleichungssystems (3), (4). Man erhält

$$(x;\ y) = \left(\frac{b(2a^2 + b^2)}{3(a^2 + b^2)}\ ;\ \frac{a(a^2 + 2b^2)}{3(a^2 + b^2)}\right). \qquad (5)$$

Damit folgt*

$$J(UVW) = \frac{ab}{9} = \frac{2}{9}\,J(ABC),$$

d. h. $r = 2 : 9$.

---

* Man kann als bekannten Sachverhalt eine Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks, ausgedrückt durch die Koordinaten der Eckpunkte, heranziehen; oder man erhält z. B. mit dem Lot WL von W auf CA und mit x, y aus (5)

$$J(UVW) = J(UCLW) - J(UCV) - J(VLW)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} + y\right) \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{9} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{b}{3}\right) \cdot y$$
$$= \frac{1}{6}\left(ax + by - \frac{ab}{3}\right)$$

usw. mit $ax + by = ab$ nach (3). (Bei diesem Rechenweg erübrigt sich sogar die explizite Angabe (5).)

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

301221

Rechnerische Umformungen zu den Termen in (1) und (2)	5
Durchführung des geforderten Schlusses von (1) auf (2)	3
	8

301222

Erste Teilermittlung (z. B. Ausschließen von ganzzahligen Paaren, die (1) nicht erfüllen)	4
Weitere Teilermittlung (z. B. weiteres Ausschließen von Paaren, die (2) nicht erfüllen)	3
Nachweis von (1), (2) für das verbliebene Paar (dieser Nachweis kann mit den vorgenannten Teilermittlungen gekoppelt auftreten)	3
	10

301223

Anfangsschritt	3
Für einzelne Wertberechnungen ohne Ansätze genereller oder induktiver Aussagemöglichkeiten ist ebenfalls höchstens diese Punktzahl zu vergeben.	
Induktionsschritt: Rechnerische Umformungen, auf denen eine Herleitung von (3) aus (2) beruht	5
Ersichtlich logisch korrekt geführter Beweisverlauf	3
	11

Falls ein Beweis ohne vollständige Induktion geführt wird, ist eine sinngemäße Einordnung von Punktvergaben vorzunehmen. Insbesondere ist auch dabei zu unterscheiden zwischen rechnerischen Angaben und Korrektheit einer logischen Abfolge.

301224

Erstes Teilresultat, z. B. J(SUV) = J(ABC) : 9 oder z. B. Koordinaten von U, V, Gleichung der Gerade durch S, W	4
Zweites Teilresultat, z. B. J(SWU) + J(SWV) = J(ABC) : 9 oder z. B. Koordinaten von W, Formel zur Ermittlung von J(UVW)	5
Abschließende Ergebnisgewinnung	2
	11