A 10;I

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

301031

Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, daß es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge ...01 endet; z. B. hat $17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.

Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge ...10 endet?

301032

Bekanntlich nennt man jede Folge von n Zahlen der Form

$$a_1 = z, \quad a_2 = z+d, \quad a_3 = z+2d, \quad \ldots, \quad a_n = z + (n-1)d \qquad (1)$$

($n \geqq 1$ natürliche Zahl; z, d reelle Zahlen)

eine (endliche) arithmetische Folge.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen arithmetischen Folgen (1), in denen auch z und d natürliche Zahlen mit $z \geqq 1$, $d \geqq 1$ sind und für die $n \geqq 3$ sowie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1991 \qquad (2)$$

gilt!

30 11 94-1

A 10;I
301033

Es sei F die Oberfläche eines regulären Tetraeders ABCD. Die Mittelpunkte der Strecke AB bzw. CD seien M bzw. N.
Die Abbildungen A 301033 a und b verdeutlichen den Vorgang des "Aufschneidens einer Fläche F längs einer Kurve k = XY": Diese Kurve k, die im Innern der Fläche F verläuft, geht durch das Aufschneiden über in eine von X nach Y durchlaufene Kurve k_1 und eine andere von Y nach X durchlaufene Kurve k_2. Beide Kurven k_1 und k_2 bilden zusammen eine neu entstandene geschlossene (d. h. in sich zurücklaufende) Randkurve der aufgeschnittenen Fläche F.

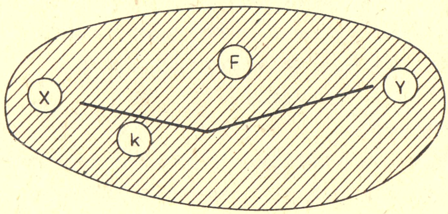

Abb. A 301033 a

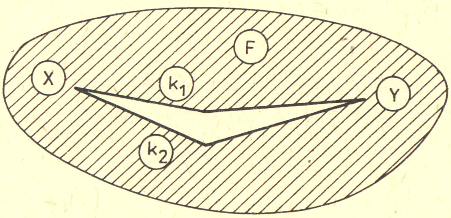

Abb. A 301033 b

a) Schneidet man die Tetraederfläche F in dieser Weise zweimal auf, nämlich längs der Strecke AB und außerdem längs der Strecke CD, so läßt sich die aufgeschnittene Fläche F so verbiegen, daß die aus AB und aus CD entstandenen Randkurven zu zwei Kreislinien werden, die in zueinander parallelen Ebenen liegen. Die Fläche F wird dabei zur Mantelfläche eines geraden Zylinders.

b) Schneidet man die Tetraederfläche sowohl längs der Kurve auf, die aus den Strecken CM und MD besteht, als auch längs der Kurve, die aus den Strecken AN und NB besteht, so läßt sich F ebenfalls so verbiegen, daß die Randkurven zu Kreislinien werden und F zum Mantel eines geraden Zylinders.

Untersuchen Sie, welcher der beiden in a), b) genannten Zylinder das größere Volumen hat!

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

301034

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen!

$$||x - 2| - 2| < 1. \qquad (1)$$

301035

Man untersuche, ob es eine Menge M von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) Keine Zahl aus M enthält einen Primfaktor größer als 31.

(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus M ist eine Quadratzahl.

301036

Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, daß c die Länge der Seite AB ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und daß der Winkel $\sphericalangle ACB$ die Größe 60° hat.

(a) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden;

(b) beschreiben Sie eine solche Konstruktion!

(c) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.

(d) Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A,B,C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

301031) Lösung: 6 Punkte

Es gibt keine solchen Zahlen. Beweis:
Jede Zahl, deren Darstellung im System mit der Basis 4 auf ...10 endet, ist von der Form

$$a_m \cdot 4^m + \ldots + a_2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 0 \quad (m \geqq 1)$$

mit natürlichen Zahlen $a_m, \ldots, a_2$ (den vor ...10 stehenden Ziffern* der Darstellung), also durch 4 teilbar.
Jede Zahl aber, deren Darstellung im System mit der Basis 2 auf ...10 endet, ist entsprechend von der Form

$$b_n \cdot 2^n + \ldots + b_2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 4 \cdot (b_n \cdot 2^{n-2} + \ldots + b_2) + 2,$$

also nicht durch 4 teilbar. Daher kann keine Zahl beide Darstellungen besitzen.

301032) Lösung: 7 Punkte

Für jede arithmetische Folge (1) gilt bekanntlich

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2} \cdot (2z + (n-1)d).$$

Daher ist (2) äquivalent mit

$$n \cdot (2z + (n-1)d) = 2 \cdot 11 \cdot 181. \qquad (3)$$

Dabei steht auf der linken Seite das Produkt zweier natürlicher Zahlen $n \geqq 3$ und $2z + (n-1)d \geqq 2 + (n-1) > n$; die drei Faktoren auf der rechten Seite von (3) sind Primzahlen (für 181 folgt dies daraus, daß keine der Primzahlen $p = 2,3,5,6,11,13$ mit $p^2 \leqq 181$ Teiler von 181 ist). Also wird (3) genau dann erfüllt, wenn einer der Fälle

$$n = 11, \quad 2z + 10d = 362, \qquad (4)$$

$$n = 22, \quad 2z + 21d = 181 \qquad (5)$$

vorliegt.

---

* Im Fall m = 1 gibt es keine solchen a_i, die Darstellung reduziert sich auf $1 \cdot 4 + 0$. Entsprechendes gilt weiter unten für n = 1.

Die zweite Gleichung in (4) ist äquivalent mit $z = 181 - 5d$; hierfür gibt es mit natürlichen Zahlen $z \geqq 1$, $d \geqq 1$ genau die 36 Lösungen

$d=1, z=181-5\cdot 1$; $d=2, z=181-5\cdot 2$; ...; $d=36, z=181-5\cdot 36$.

Die zweite Gleichung in (5) kann mit natürlichen Zahlen z, d nur erfüllt werden, wenn d ungerade, d. h. von der Form $d = 2k+1$ mit natürlichem k ist. Hierfür ist die zweite Gleichung in (5) äquivalent mit

$$2z + 21(2k+1) = 181,$$
$$z = 80 - 21k,$$

und es gibt mit natürlichen Zahlen $z \geqq 1$, $k \geqq 0$ genau die 4 Lösungen

$k=0, z=80-21\cdot 0$; $k=1, z=80-21\cdot 1$; $k=2, z=80-21\cdot 2$; $k=3, z=80-21\cdot 3$.

Die gesuchte Anzahl aller in der Aufgabe genannten arithmetischen Folgen beträgt daher $36 + 4 = 40$.

301033)Lösung: 7 Punkte

Jede der beiden entstehenden Zylinder-Mantelflächen hat als Umfang ihres Grund- und Deckkreises die doppelte Länge jeweils einer Kurve, längs deren die Tetraederfläche F aufgeschnitten wird. Die Höhe des betreffenden Zylinders ist die Länge des Lotes, das von einem Punkt der einen Schnittkurve auf ein - in der ursprünglichen Lage von F geradliniges - Stück der anderen Schnittkurve gefällt wird, wenn dieses Lot ganz in der Tetraederfläche verläuft.

So ergibt sich (Abb. L 301033 a,b):

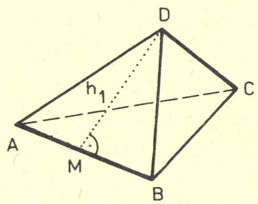

Abb. L 301033 a

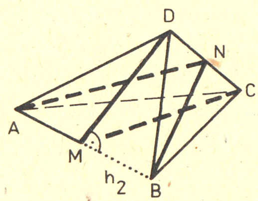

Abb. L 301033 b

L 10;I

Ist a die Kantenlänge des Tetraeders ABCD, so hat im Fall a) der Zylinder den Grundkreisumfang $u_1 = 2 \cdot \overline{AB} = 2a$ und die Höhe $h_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Im Fall b) hat der Zylinder den Grundkreisumfang $u_2 = 2 \cdot (\overline{CM} + \overline{MD}) = 2a\sqrt{3}$ und die Höhe $h_2 = \frac{a}{2}$. Für die Höhen gilt also

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{3},$$

für die Grundkreisradien r_1 bzw. r_2 gilt

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also gilt für die Volumina $V_i = \pi r_i^2 h_i$ $(i = 1, 2)$ der beiden Zylinder

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

und daher $V_2 > V_1$, d. h.: Der in b) genannte Zylinder hat das größere Volumen.

Bemerkung: Zur besseren Veranschaulichung (die nicht vom Schüler gefordert wird) kann man außer den vorgeschriebenen Schnitten einen weiteren Schnitt längs eines oben beschriebenen Lotes durchführen. Danach läßt sich die Fläche F zu einem Rechteck ausbreiten (Abb. L 301033 c,d), das man durch Zusammenkleben längs des zusätzlich ausgeführten Schnittes zum Zylinder umformen kann und an dem sich Grundkreisumfang und Zylinderhöhe direkt ablesen lassen.

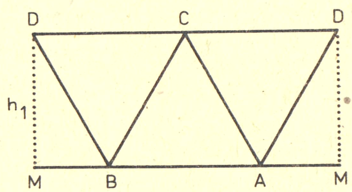

Abb. L 301033 c

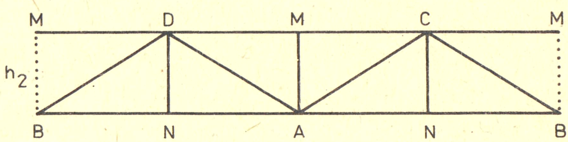

Abb. L 301033 d

XXX. Olympiade Junger Mathematiker
3. Stufe

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

301034) Lösung: 6 Punkte

Die Ungleichung (1) ist der Reihe nach äquivalent zu den Aussagen

$-1 < |x - 2| - 2 < 1,$

$|x - 2| > 1$ und $|x - 2| < 3,$

$(x - 2 < -1$ oder $x - 2 > 1)$ und $-3 < x - 2 < 3,$

$(x < 1$ oder $x > 3)$ und $-1 < x < 5,$

$(x < 1$ und $-1 < x < 5)$ oder $(3 < x$ und $-1 < x < 5),$

$-1 < x < 1$ oder $3 < x < 5.$ (2)

Die Menge aller gesuchten Zahlen x ist also die Vereinigungsmenge des Intervalls aller x mit $-1 < x < 1$ und des Intervalls aller x mit $3 < x < 5$.

2. Lösungsweg:

Bezeichnet f die für alle reellen x durch $f(x) = ||x - 2| - 2| - 1$ definierte Funktion, so sind alle diejenigen x gesucht, für die $f(x) < 0$ gilt. Der Graph von f kann folgendermaßen erhalten werden (Abb. L 301034): Man bildet den Graph der Funktion g, die für alle reellen x durch $g(x) = x - 2$ definiert ist, d. h. die Gerade durch den Punkt P(0;-2) mit dem Anstieg 1, spiegelt den unterhalb der x-Achse liegenden Teil dieser Geraden an der x-Achse, verschiebt die erhaltene Kurve in Richtung der y-Achse um -2, spiegelt nochmals die Kurventeile unterhalb der x-Achse an der x-Achse und verschiebt nochmals in Richtung der y-Achse um -1.
An dem so erhaltenen Graph läßt sich die obengenannte Lösungsmenge ablesen.

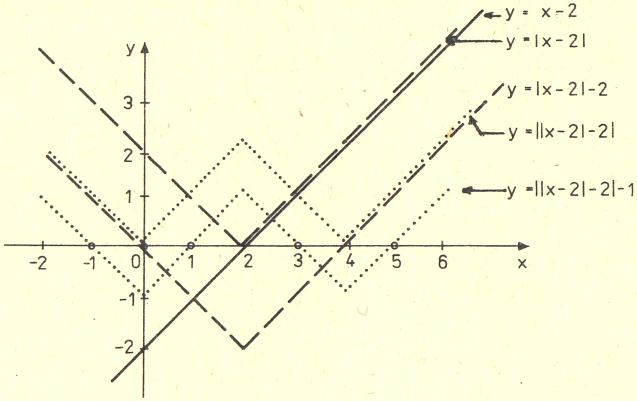

Abb. L 301034

3. Lösungsweg:

Die Ungleichung (1) ist der Reihe nach äquivalent mit

$$(|x - 2| - 2)^2 < 1,$$
$$(x - 2)^2 - 4|x - 2| + 4 < 1,$$
$$x^2 - 4x + 7 < 4|x - 2|,$$
$$(x^2 - 4x + 7)^2 - 16(x - 2)^2 < 0,$$
$$((x^2 - 4x + 7) - 4(x - 2))((x^2 - 4x + 7) + 4(x - 2)) < 0,$$
$$(x^2 - 8x + 15)(x^2 - 1) < 0,$$
$$(x - 5)(x - 3)(x - 1)(x + 1) < 0. \qquad (3)$$

Die Betrachtung der Vorzeichen der vier Faktoren in (3) in den Intervallen

$$x \leqq -1, \quad -1 < x < 1, \quad 1 \leqq x \leqq 3, \quad 3 < x < 5, \quad x \geqq 5$$

zeigt, daß (3) genau in den Intervallen $-1 < x < 1$ und $3 < x < 5$ erfüllt wird.

301035)Lösung: 7 Punkte

Es gibt eine solche Menge. Man bezeichne etwa, um eine Menge zu definieren, die 11 Primzahlen 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31 mit $p_1, p_2, \ldots, p_{11}$ und bilde Zahlen

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_{11}^{a_{11}}, \qquad (3)$$

worin an die Stelle jedes Exponenten a_i eine der Zahlen 0; 1 gesetzt wird. Da die Wahl dieser a_i an allen 11 Stellen unabhängig erfolgt, gibt es hierfür $2^{11} = 2048$, also erst recht 1991 verschiedene Möglichkeiten. Eine Menge M von 1991 so gebildeten Zahlen n erfüllt offensichtlich (1). Ferner sind zwei Zahlen aus M, etwa n aus (3) und

$$k = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_{11}^{b_{11}}, \tag{4}$$

genau dann voneinander verschieden, wenn für mindestens ein i (mit $1 \leqq i \leqq 11$) die Ungleichung $a_i \neq b_i$ gilt. Für je zwei solche n, k ist folglich der eine der beiden Exponenten a_i, b_i gleich 0, der andere gleich 1; also enthält das Produkt $n \cdot k$ mindestens den Primfaktor p_i in der Potenz

$$p_i^{a_i + b_i} = p_i^1 .$$

Daher ist keines dieser Produkte von zwei verschiedenen n, k aus M eine Quadratzahl; d. h., M erfüllt auch (2).

<u>301036)Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

(a) Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen erfüllt, so folgt mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC}$, $\beta = \overline{\sphericalangle ABC}$, $\gamma = \overline{\sphericalangle ACB}$ (Abb. L 301036 a): Ist M der Inkreismittelpunkt, also der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, so ist nach dem Innenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle AMB} = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2} = 120^\circ$. Daher liegt M nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz auf demjenigen Kreis k, in dem $\sphericalangle AMB$ ein zum Zentriwinkel $\sphericalangle AZB$ der Größe 240° gehörender Peripheriewinkel ist. Ist ZD der Radius von k, der diesen Zentriwinkel halbiert, so zerlegen ZA, ZB, ZD den Vollwinkel in drei Winkel zu je 120°, also ist ABD ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge c und Z sein Höhenschnittpunkt.

Ferner hat M den Abstand r von AB und liegt nicht auf dem von A über D nach B führenden Bogen. Daher gehört M derjenigen Parallelen im Abstand r zu AB an, die nicht auf derselben Seiten von AB liegt wie Z.

Damit ist bewiesen, daß das Dreieck ABC durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

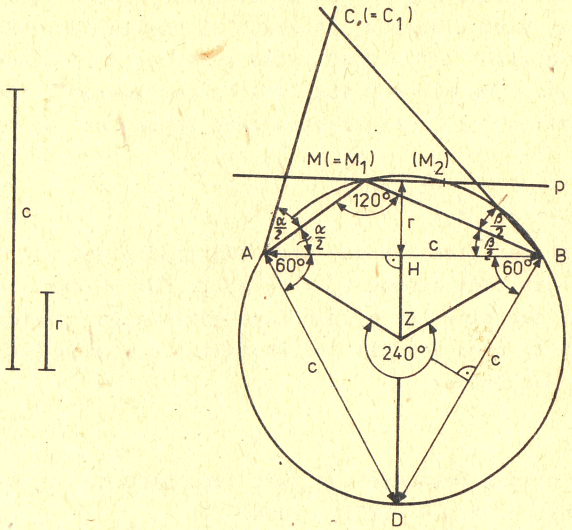

Abb. L 301036 a

(b)

1. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck ABD der Seitenlänge c und seinen Höhenschnittpunkt Z.
2. Man konstruiert den Kreis k um Z durch A.
3. Man konstruiert diejenige Parallele p im Abstand r zu AB, die nicht auf derselben Seite von AB liegt wie Z, und wählt als M einen Schnittpunkt von k mit p.
4. Man trägt an AB in A den Winkel der Größe $2 \cdot \overline{\sphericalangle BAM}$ und an BA in B den Winkel der Größe $2 \cdot \overline{\sphericalangle ABM}$ nach derjenigen Seite von AB an, auf der M liegt, und bringt die zweiten Schenkel dieser Winkel zum Schnitt C.

(c) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, so folgt: Nach 1. ist $\overline{AB} = c$, und die Dreiecke ABZ, BDZ, DAZ haben Innenwinkel von $30^0, 30^0, 120^0$. Für den nach 3. erhaltenen Punkt M ist folglich $\sphericalangle AMB$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\sphericalangle AZB$ der Größe $2 \cdot 120^0$, also gilt $\overline{\sphericalangle AMB} = 120^0$. Daher ist

$\overline{\sphericalangle BAM} + \overline{\sphericalangle ABM} = 180^0 - 120^0 = 60^0$, und nach 4. folgt

$$\overline{\sphericalangle ACB} = 180^0 - (2 \cdot \overline{\sphericalangle BAM} + 2 \cdot \overline{\sphericalangle ABM}) = 180^0 - 2 \cdot 60^0 = 60^0.$$

Ferner folgt aus 4., daß M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt von ABC ist. Sein Abstand von AB ist folglich der Inkreisradius, nach 3. beträgt er r. Damit erfüllt das Dreieck ABC alle geforderten Bedingungen.

(d) Die Konstruktionsschritte 1.,2. und die Konstruktion von p in 3. sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Der Abstand von Z zur Geraden p ist $d = \overline{ZH} + r$, wo ZH im gleichschenkligen Dreieck ABZ Höhe, also auch Seiten- und Winkelhalbierende ist. Daher ist AZH ein Dreieck mit Innenwinkeln von $30^0, 60^0, 90^0$, und $e = \overline{ZH}$ ist die halbe Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Höhenlänge $\overline{AH} = \frac{c}{2}$. Daraus folgt $\frac{c}{2} = e\sqrt{3}$,

$e = \frac{\sqrt{120}}{2\sqrt{3}}$ cm $= \sqrt{10}$ cm. Wegen $3 < \sqrt{10}$ ist somit $d = (\sqrt{10} + 3)$ cm kleiner als der Radius $\overline{AZ} = 2e = 2\sqrt{10}$ cm von k. Daher schneiden sich p und k in zwei Punkten M_1, M_2, unter denen nach 3. der Punkt M zu wählen ist, und es ist bewiesen, daß Dreiecke existieren, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Wegen $p \perp ZH$ liegen M_1 und M_2 ebenso wie A und B symmetrisch zur Geraden durch Z und H. Daher sind die beiden Dreiecke ABM_1, BAM_2 (mit dieser Reihenfolge entsprechender Punkte) zueinander kongruent. Dasselbe gilt für die beiden nach 5. zu $M = M_1$ bzw. $M = M_2$ erhaltenen Dreiecke ABC_1 bzw. BAC_2. Damit ist gezeigt, daß es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck gibt, das die geforderten Bedingungen erfüllt.

L 10;II

Hinweis auf eine andere Lösungsmöglichkeit:

Man beginnt mit der Konstruktion des Dreiecks CQM (Abb. L 301036 b) aus $\overline{MQ} = r$, $\overline{\sphericalangle MQC} = 90^0$, $\overline{\sphericalangle MCQ} = 30^0$ und nutzt dann den Satz, daß für die gemeinsamen Tangenten von In- und Ankreis $\overline{QQ'} = \overline{AB}$ gilt. Also kann man Q' und dann den Ankreis konstruieren. Wieder ist aus $3 < \sqrt{10}$ herzuleiten, daß er den Inkreis meidet; daher erhält man die beiden möglichen Lagen von AB (und die Kongruenzaussage für die beiden erhaltenen Dreiecke) nach Konstruktion der beiden gemeinsamen inneren Tangenten.

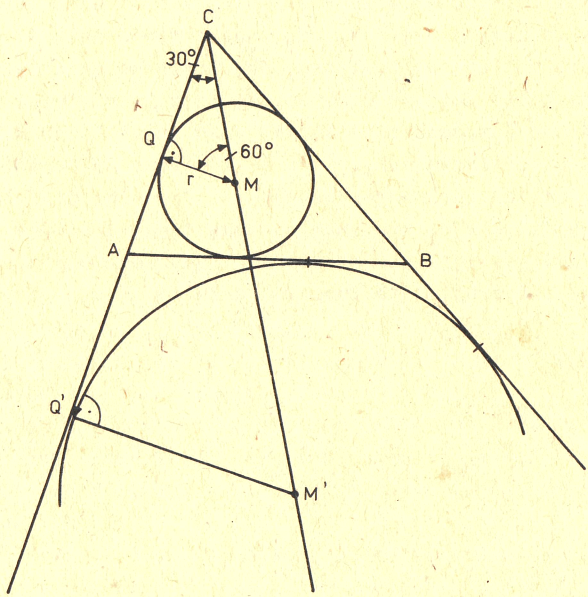

Abb. L 301036 b