A 10

XXX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

301021

In dem nachstehenden Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, daß gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe o braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt zu werden.

$$\begin{array}{rr} & m\ o\ r\ d \\ + & r\ a\ u\ b \\ \hline = & k\ r\ i\ m\ i \end{array}$$

a) Beweisen Sie, daß sogar in keiner Lösung des Kryptogramms der Buchstabe o durch 0 ersetzt wird!

b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für a befinden! Bestätigen Sie, daß die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

301022

Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist!
(Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.)

301023

Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn ABCD ein Rechteck mit $\overline{AB} > \overline{AD}$ ist, so schneidet die Mittelsenkrechte der Diagonale AC die Randlinie des Dreiecks ABC in einem Punkt P, der zwischen B und dem Mittelpunkt Q der Strecke AB liegt.

301024

Für jede ganze Zahl $n > 0$ sei

$$a_n = ((n + 1)\sqrt{n} + n\sqrt{n + 1})^{-1};$$

mit dieser Bezeichnung sei

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_{1989} + a_{1990}.$$

Beweisen Sie, daß hieraus $0{,}5 < s < 1$ folgt!

kunlaut

XXX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

301021) Lösung: 9 Punkte

a) Wäre $o = 0$ möglich, so müßte (um $a = i$ zu vermeiden)

$$r + u + X = 10 + m \qquad (1)$$

gelten, wobei X diejenige der beiden Zahlen 0 und 1 ist, mit der $d + b = 10 \cdot X + i$ gilt. Da aus den Angaben der Zehntausender- und Tausenderstelle aber $k = 1$ und dann $m = 9$ folgt, führt (1) wegen $r \leqq 8$, $u \leqq 8$, $X \leqq 1$ auf einen Widerspruch.

b) Vier geforderte Ersetzungen sind z. B.

a	b	c	i	k	m	o	r	u
2	4	6	0	1	9	8	3	5
4	2	8	0	1	9	6	3	5
6	2	8	0	1	9	4	3	5
8	4	6	0	1	9	2	3	5

Sie werden als Lösungen bestätigt mit den entstehenden Additionsaufgaben

$$\begin{array}{r} 9836 \\ +\ 3254 \\ \hline =\ 13090 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9638 \\ +\ 3452 \\ \hline =\ 13090 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9438 \\ +\ 3652 \\ \hline =\ 13090 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9236 \\ +\ 3854 \\ \hline =\ 13090 \end{array}$$

Bemerkung: Alle weiteren Lösungen des Kryptogramms entstehen, indem man in jeder der vier hier angegebenen Lösungen entweder b mit d vertauscht oder r mit u vertauscht oder beider Vertauschungen vornimmt. Diese Angaben werden nicht vom Schüler verlangt, erst recht nicht ein Beweis der darin enthaltenen Eindeutigkeitsaussage, auch nicht in Gestalt der Angabe von Ausschließungs- oder sonstigen Suchschritten (diese Bemerkung ergibt sich bei Beachtung der Anforderungsformulierungen im Aufgabenteil b)).

301022) Lösung: 10 Punkte

Für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, gilt:
Es ist $n > 1$; denn wegen $0 = 0^2$ und $1 = 1^2$ sind 0 und 1 Quadratzahlen. Wäre nun $\sqrt{n}$ rational, so gäbe es natürliche Zahlen r und s mit $s > 0$ und

$$\sqrt{n} = \frac{r}{s}.$$

Daraus würde

$$n = \frac{r^2}{s^2},$$

$$n \cdot s^2 = r^2 \qquad (1)$$

folgen.
Die auf beiden Seiten der Gleichung (1) stehende natürliche Zahl wäre größer als 1, also das Produkt aus einer Anzahl (größer als 0) von Primfaktoren. Dasselbe träfe für n zu; ferner müßte in der Primfaktorzerlegung von n mindestens ein Primfaktor p in ungerader Anzahl auftreten; denn andernfalls erhielte man n als das Quadrat derjenigen natürlichen Zahl k, in der jeder Primfaktor in halb so großer Anzahl vorkäme wie in n.
In s^2 käme jeder Primfaktor, also auch p, entweder gar nicht oder in gerader Anzahl vor. Also käme p in $n \cdot s^2$ in ungerader Anzahl vor. In r^2 aber käme jeder Primfaktor in gerader Anzahl vor. Das widerspricht der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung der in (1) genannten Zahl.

Bemerkung: Läßt man den Fall einer Anzahl Null von Faktoren zu, indem man als Wert des Produktes dann 1 definiert, so ist eine gesonderte Betrachtung von $n = 1$ entbehrlich, ebenso eine gesonderte Erwähnung der Möglichkeit, daß p in s^2 gar nicht vorkommt. Man kann für einen größeren Beweisanteil die indirekte Beweisführung vermeiden: Aus der Voraussetzung, $\sqrt{n}$ sei rational, folgt (1) und dann entweder (falls $r = 0$ ist) $n = 0$ oder die Aussage, daß in der Primfaktorzerlegung von n jeder Primfaktor in gerader Anzahl (die auch 0 sein kann) auftritt, n also Quadratzahl ist.

301023) Lösung: 10 Punkte

I. Der Mittelpunkt von AC sei M; die Mittelsenkrechte von AC ist also die auf AC in M errichtete Senkrechte. Wegen $\overline{\angle BAM} = \overline{\angle BAC} < 90^\circ$ gilt zunächst:

Die Mittelsenkrechte von AC schneidet den Strahl aus A durch B in einem Punkt P. (1)

L 10

Wegen $\overline{AM} : \overline{AC} = \overline{AQ} : \overline{AB} = 1 : 2$ folgt weiter

$QM \parallel BC$ (Umkehrung des Strahlensatzes),

$\overline{\sphericalangle AMQ} = \overline{\sphericalangle ACB}$ (Stufenwinkelsatz)

$< 90^\circ$

also $\overline{\sphericalangle AMQ} < \overline{\sphericalangle AMP}$. Daher liegt

P auf der Verlängerung von AQ über Q hinaus. (2)

II. Da alle Punkte der Mittelsenkrechten von AC denselben Abstand von A wie von C haben, gilt auch $\overline{PA} = \overline{PC}$. Daraus folgt

$\overline{\sphericalangle ACP} = \overline{\sphericalangle CAP}$ (Basiswinkelsatz)

$= \overline{\sphericalangle CAB}$.

Aus $\overline{BC} < \overline{AB}$ folgt für die im Dreieck ABC gegenüberliegenden Winkel $\overline{\sphericalangle CAB} < \overline{\sphericalangle ACB}$; damit ergibt sich

$\overline{\sphericalangle ACP} < \overline{\sphericalangle ACB}$.

Also liegt

P zwischen A und B. (3)

Mit (1), (2), (3) ist bewiesen: P liegt zwischen Q und B.

<u>Bemerkung:</u> Sowohl für die Wahl, mit welchen Teilaussagen (wie hier (1), (2), (3)) der geforderte Beweis geführt werden soll, als auch für die Beweise zu derartigen Teilaussagen gibt es mehrere andere Möglichkeiten.

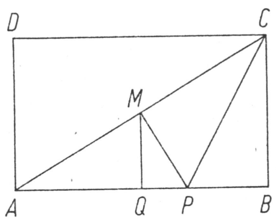

Abb. L 301023

301024) Lösung: 11 Punkte

Für jedes $n > 0$ gilt

$$a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Damit folgt

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1990}} - \frac{1}{\sqrt{1991}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1991}}$$

$$< 1$$

und wegen $\frac{1}{1991} < \frac{1}{4}$, also $\frac{1}{\sqrt{1991}} < \frac{1}{2}$ auch $s > \frac{1}{2}$.

Bemerkung: Die Ungleichung $s > \frac{1}{2}$ kann bereits durch Berechnung von

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = \frac{2 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}},$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + \sqrt{6}} =$$

$$= \frac{21 + 15\sqrt{2} + 12\sqrt{3} + 9\sqrt{6}}{42 + 30\sqrt{2} + 24\sqrt{3} + 18\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

bewiesen werden, die auch als Anregung dienen kann, allgemein für $a_1 + \dots + a_n$ nach Vereinfachung zu suchen.

L 10

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

301021

a) Widerlegung von o = 0 — 4

b) Angabe und Bestätigung für vier Ersetzungen der geforderten Art — 5

Summe: 9

301022

Schluß von der Rationalität von $\sqrt{n}$ auf eine Gleichung für ganze Zahlen (einschließlich explizit erforderlicher oder bei implizitem Vorgehen ausreichend berücksichtigter Fälle $n = 0$, $n = 1$) — 5

Nachweis des Widerspruchs zwischen einer solchen Gleichung und der Eigenschaft von n, nicht Quadratzahl zu sein (oder einer zu einem solchen Widerspruch logisch äquivalenten Aussage) — 5

Summe: 10

301023

Nachweis, daß die Mittelsenkrechte den Strahl aus A durch B (und nicht den hierzu entgegengesetzten Strahl) schneidet — 2

Nachweis, daß der Schnittpunkt P auf der Verlängerung von AQ über Q hinaus liegt — 4

Bei anderem Beweisaufbau sind diese 6 Punkte in entsprechender Weise auf zwei wesentlich vorbereitende Beweisteile aufzuteilen.

Abschließender Nachweis (im Beispiel vermittels der Aussage, daß P zwischen A und B liegt) — 4

Summe: 10

301024

Nachweis von $s > 0{,}5$ (durch Berechnung von $a_1+a_2+a_3$ oder im Rahmen einer Umformung von s) — 3

Nachweis von $s < 1$:

Umformung von a_n — 4

Schlußfolgern auf Umformung von s — 4

Summe: 11