XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

300931

Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:
Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung. Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.
Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.
Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.

Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, daß er mit Sicherheit gewinnt?

300932

Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

300933

Man beweise, daß es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

A 9;II

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

<u>300934</u>

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400, für die die Summe s der Ziffern bei Darstellung von n im Dezimalsystem (die übliche "Quersumme") gleich der Summe t der Ziffern ist, die bei der Darstellung von n im System mit der Basis 9 auftreten.

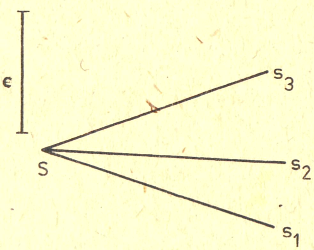
<u>Hinweis:</u> Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Mißverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendigen Ziffern 0,1,...,8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

<u>300935</u>

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x,y,z) natürlicher Zahlen, für die
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$$
gilt!

<u>300936</u>

Gegeben seien drei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s_1, s_2, s_3. Dabei habe der von s_1 und s_3 gebildete Winkel $\sphericalangle(s_1,s_3)$ eine beliebige Größe kleiner als 60°, und der Strahl s_2 sei ein beliebiger von S aus in das Innere des Winkels $\sphericalangle(s_1,s_3)$ hinein verlaufender Strahl (siehe Abb. A 300936). Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge c.



(a) Wählen Sie derartige Vorgaben c, s_1, s_2, s_3 (dabei s_2 nicht als Winkelhalbierende von $\sphericalangle(s_1,s_3)$) und konstruieren Sie dann drei von S verschiedene Punkte A auf s_1, B auf s_2 und C auf s_3 so, daß sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge c sind!

(b) Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Abb. A 300936

30 11 94-1

(c) Beweisen Sie, daß das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck ABC gleichseitig ist und daß seine Ecken A,B,C auf s_1, s_2 bzw. s_3 liegen!

Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

XXX. Olympiade Junger Mathematiker
3. Stufe
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

300931)Lösung: 6 Punkte

Wir stellen fest, wie sich bei jedem Zug die Anzahl der im Spiel befindlichen ungeraden Zahlen ändern kann:
Werden zwei gerade Zahlen entnommen, so wird als Differenz eine gerade Zahl hinzugefügt; die Anzahl der ungeraden Zahlen ändert sich nicht.
Wird eine gerade und eine ungerade Zahl entnommen, so wird als Differenz eine ungerade Zahl hinzugefügt; die Anzahl der ungeraden Zahlen ändert sich ebenfalls nicht.
Werden zwei ungerade Zahlen entnommen, so wird als Differenz eine gerade Zahl hinzugefügt; die Anzahl der ungeraden Zahlen nimmt um 2 ab.
Bei jedem Zug ändert sich folglich die Anzahl der im Spiel befindlichen ungeraden Zahlen um eine gerade Zahl. Daraus folgt, daß bei jedem möglichen Spielverlauf die Zahl, die als letzte übrigbleibt, ungerade sein muß; denn wäre sie gerade, so wäre damit die Anzahl der im Spiel befindlichen ungeraden Zahlen von ihrem Anfangswert 25 auf den Endwert 0 gefallen, hätte sich also insgesamt um eine ungerade Zahl geändert.
Also gewinnt stets B. (In genauer Beantwortung der in der Aufgabe gestellten Frage bedeutet das[1]: Von den beiden Spielern kann genau der Spieler B das Spiel so gestalten, daß er mit Sicherheit gewinnt, und zwar einfach dadurch, daß er beliebig spielt.)

300932)Lösung: 7 Punkte

Genau dann ist 1991 als Summe von $n \geqq 3$ aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen, beginnend mit $z \geqq 1$, dargestellt, d. h. genau dann gilt für solche n, z

---
1 Bei richtig erhaltener Aussage, daß B stets gewinnt, sollte eine auch formal in angegebener Weise ausgeführte Beantwortung nicht vom Schüler gefordert werden.

L 9;I

$$1991 = z + (z+1) + \ldots + (z+n-1), \qquad (1)$$

wenn

$$1991 = \frac{n}{2} \cdot (2z+n+1) \qquad (2)$$

gilt[1].

Die Zahl 1991 hat[2] die Primfaktorzerlegung $1991 = 11 \cdot 181$. Daher wird die zu (2) äquivalente Gleichung

$$n \cdot (2z+n-1) = 2 \cdot 11 \cdot 181$$

unter den aus $n \geqq 3$, $z \geqq 1$ folgenden Bedingungen

$$3 \leqq n < 2z+n-1$$

genau in folgenden Fällen erfüllt:

$$n = 11, \quad 2z+n-1 = 362, \quad z = 176; \qquad (3)$$

$$n = 22, \quad 2z+n-1 = 181, \quad z = 80. \qquad (4)$$

Somit gibt es genau zwei Darstellungen (1) der geforderten Art, nämlich mit den in (3) bzw. (4) genannten Werten, d. h. genau die zwei Darstellungen

$$1991 = 176 + 177 + \ldots + 186,$$
$$1991 = 80 + 81 + \ldots + 101.$$

300933)Lösung: 7 Punkte

I. Man kann z. B. folgendermaßen 10 Punkte im Innern oder auf dem Rand eines Quadrates $A_0A_4D_4D_0$ der Seitenlänge 10 cm anordnen: Man zerlege A_0A_4 in 4 gleichlange Teilstrecken, A_0D_0 in 3 gleichlange Teilstrecken. Die Parallelen durch die Teilpunkte zu den Quadratseiten zerlegen das Quadrat in Rechtecke, deren Eckpunkte wie in Abbildung L 300933 a bezeichnet seien. Von ihnen seien A_0, A_2, A_4, B_1, B_3, C_0, C_2, C_4, D_1, D_3 ausgewählt.

II. Man kann den Würfel durch Ebenen in drei Quader zerlegen, von denen jeder die Kantenlängen 10 cm, 10 cm, $\frac{10}{3}$ cm hat. Auf den 4 dabei auftretenden Quadratflächen (siehe Abb. L 900933 b) kann man je 10 Punkte wählen, abwechselnd so angeordnet wie die in I. gewählten Punkte bzw. wie die dort nicht gewählten Punkte A_1, A_3, B_0, B_2, B_4, C_1, C_3, D_0, D_2, D_4.

---

1 Dies kann einer - als bekannter Sachverhalt zitierten - Formel für die Summe aufeinanderfolgender ganzer Zahlen oder auch für die Summe einer arithmetischen Reihe entnommen werden, oder es kann z. B. hergeleitet werden, indem man zu (1) gliedweise die Darstellung
$1991 = (z+n-1) + (z+n-2) + \ldots + z$
addiert.

2 Zur Bestätigung von 181 als Primzahl führt z. B. die Feststellung, daß 181 durch keine der Primzahlen $p = 2,3,5,7,11,13$ mit $p^2 \leqq 181$ teilbar ist.

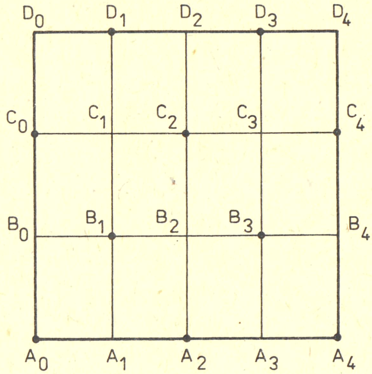


Abb. L 300933 a

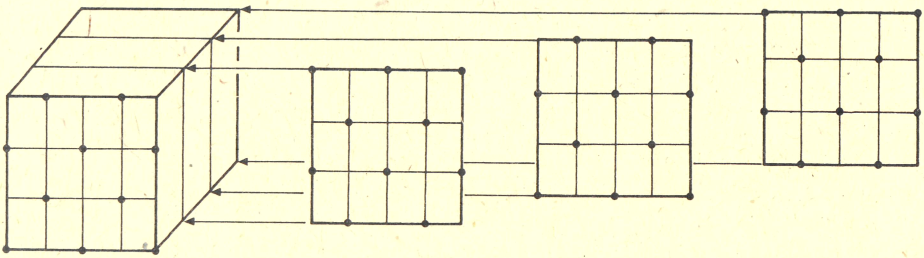


Abb. L 300933 b

III. Für die Abstände zwischen den in I. gewählten Punkten gilt: Jeder solche Abstand ist entweder Vielfaches der Länge $2\cdot\overline{A_0A_1} = 5$ cm oder der Länge $2\cdot\overline{A_0B_0} = \frac{20}{3}$ cm, oder er ist Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck mit Kathetenlängen, die Vielfache von $\overline{A_0A_1} = \frac{5}{2}$ cm bzw. $\overline{A_0B_0} = \frac{10}{3}$ cm sind. Wegen $\frac{20}{3} > 4$, $5 > 4$ und

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{5}{6}\cdot\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{25}{6} > 4 \qquad (1)$$

sind alle diese Abstände größer als 4 cm.

IV. Für die Abstände zwischen Punkten aus verschiedenen in II. genannten Quadratflächen gilt: Jeder solche Abstand beträgt (wenn diese Quadratflächen nicht benachbart sind) mindestens $2\cdot\frac{10}{3}$ cm, oder er ist Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck mit Kathetenlängen, von denen die eine $\frac{10}{3}$ cm beträgt und die andere der Abstand zwischen zwei verschiedenen Rechtecks-Eckpunkten aus Abbildung L 300933 a, also nicht kleiner als $\frac{5}{2}$ cm, ist. Damit ist, nochmals wegen (1), gezeigt, daß auch alle diese Abstände größer als 4 cm sind.

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

300934) Lösung: 6 Punkte

Wegen $100 > 9^2$ und $400 < 9^3$ sind alle natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400 auch im System mit der Basis 9 dreistellig. Somit sind für die Ziffern a,b,c im Dezimalsystem und für die Ziffern d,e,f im System der Basis 9 alle Möglichkeiten gesucht, durch natürliche Zahlen sowohl die Ungleichungen

$$1 \leqq a < 4, \quad 0 \leqq b \leqq 9, \quad 0 \leqq c \leqq 9, \qquad (1)$$

$$1 \leqq d \leqq 8, \quad 0 \leqq e \leqq 8, \quad 0 \leqq f \leqq 8 \qquad (2)$$

als auch die Gleichungen

$$100a + 10b + c = 81d + 9e + f \qquad (3)$$

(Darstellung von n im Dezimalsystem und im System der Basis 9),

$$a + b + c = d + e + f \qquad (4)$$

(Übereinstimmung der Quersummen s = t) zu erfüllen.

I. Wenn a,b,c,d,e,f natürliche Zahlen sind, für die (1) bis (4) gelten, so folgt: Nach (3) und (4) gilt

$$99a + 9b = 81d + 9e - (d + e), \qquad (5)$$

also ist d+e durch 9 teilbar. Wegen (2), also $1 \leqq d+e \leqq 16$ ist das nur mit

$$d + e = 9 \qquad (6)$$

möglich. Hieraus und aus (5) folgt

$$11a + b = 9d + e - 1 = 8d + 8, \qquad (7)$$

also ist 11a+b durch 8 teilbar. Hierfür gibt es zu den nach (1) möglichen Werten a = 1,2,3 unter den Bedingungen aus (1) für b nur die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten. Damit können (7) und (6) nur durch die anschließend genannten Werte d, e erfüllt werden.

II. Zu diesen Werten a,b,d,e werden anschließend jeweils die Werte 100a+10b und 81d+9e und dann genau diejenigen Werte c und f angegeben, die unter den Bedingungen (1),(2) die Gleichung (3) erfüllen. Da a,b,d,e wegen (6),(7) bereits (5) erfüllen, folgt hieraus, daß auch (4) erfüllt wird.

a	1	2	3
$11a+b = 8(d+1)$	$11+5 = 8 \cdot 2$	$22+2 = 8 \cdot 3$	$33+7 = 8 \cdot 5$
b	5	2	7
d	1	2	4
e	8	7	5
$100a+10b$	150	220	370
$81d+9e$	153	225	369
Werte für c	3,...,9	5,...,9	0,...,7
Werte für f	0,...,6	0,...,4	1,...,8

Somit erfüllen genau die Zahlen

153, ..., 159, 225, ..., 229, 370, ..., 377

die Bedingungen der Aufgabe.

300935)Lösung: 7 Punkte

Wenn (x,y,z) ein Tripel natürlicher Zahlen ist, für das

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} \qquad (1)$$

gilt und außerdem zunächst noch zusätzlich

$$x \leqq y \leqq z \qquad (2)$$

vorausgesetzt wird, so folgt:

Wegen $\frac{1}{y} > 0$ und $\frac{1}{z} > 0$ gilt $\frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$, also $x > \frac{5}{4}$ und daher $x \geqq 2$.

Wegen $\frac{1}{x} \geqq \frac{1}{y} \geqq \frac{1}{z}$ gilt $\frac{3}{x} \geqq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$, also $x \leqq \frac{15}{4}$ und daher $x \leqq 3$.

Wäre $x = 3$, so folgte:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}. \qquad (3)$$

Wegen $\frac{1}{z} > 0$ wäre $\frac{1}{y} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15}$, also $y > \frac{15}{7}$ und daher $y \geqq 3$.

Wegen $\frac{1}{y} \geqq \frac{1}{z}$ wäre $\frac{2}{y} \geqq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15}$, also $y \leqq \frac{30}{7}$ und daher $y \leqq 4$.

Aus (3) und $y = 3$ würde aber $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$ folgen,

aus (3) und $y = 4$ würde $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{13}{60}$ folgen,

beides im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von z.

Somit verbleibt nur die Möglichkeit $x = 2$, also

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}. \qquad (4)$$

Wegen $\frac{1}{z} > 0$ gilt $\frac{1}{y} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$, also $y > \frac{10}{3}$ und daher $y \geqq 4$.

Wegen $\frac{1}{y} \geqq \frac{1}{z}$ gilt $\frac{2}{y} \geqq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$, also $y \leqq \frac{20}{3}$ und daher $y \leqq 6$.

Wäre $y = 6$, so folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$ im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von z. Also verbleiben nur die Möglichkeiten

$$y = 4, \quad \frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}, \quad z = 20; \tag{5}$$

$$y = 5, \quad \frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}, \quad z = 10. \tag{6}$$

Daher können (1) und (2) nur durch folgende Tripel (x,y,z) natürlicher Zahlen erfüllt werden:

(2,4,20), (2,5,10).

Sie erfüllen diese Bedingungen, wie den bereits in (4),(5) bzw. (4),(6) ausgeführten Rechnungen zu ersehen ist (oder direkt durch Einsetzen in (1) festgestellt werden kann).

Ohne Einschränkung durch die zusätzliche Bedingung (2) wird (1) daher genau durch folgende Tripel natürlicher Zahlen erfüllt:

(2,4,20), (2,20,4), (4,2,20), (4,20,2), (20,2,4), (20,4,2),
(2,5,10), (2,10,5), (5,2,10), (5,10,2), (10,2,5), (10,5,2).

<u>300936)Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

(a) Abbildung L 300936 zeigt eine mögliche Konstruktion.

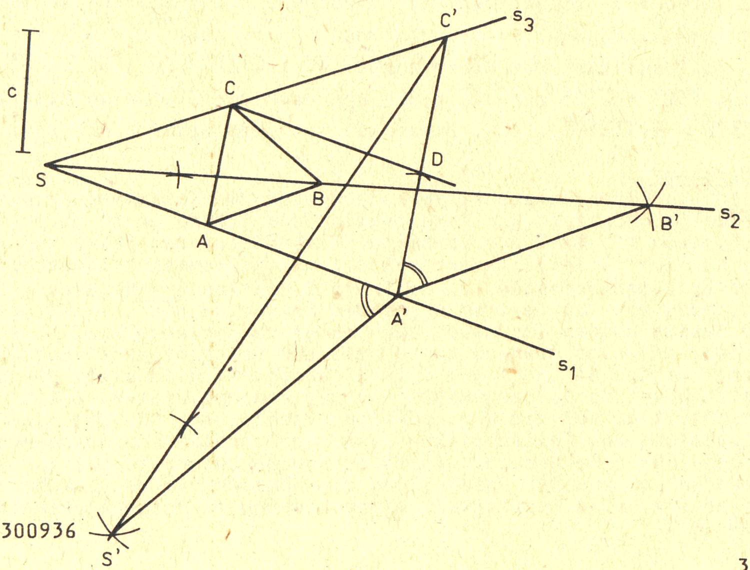


Abb. L 300936

(b) Konstruktionsbeschreibung:

1. Man wählt einen beliebigen Punkt $A' \neq S$ auf s_1.
2. Man trägt in A' an A'S nach derjenigen Seite, auf der s_3 nicht liegt, den Winkel der Größe 60° an und konstruiert auf seinem zweiten Schenkel den Punkt S' mit $\overline{A'S'} = \overline{A'S}$.
3. Man trägt in S' an S'A nach derjenigen Seite, auf der S liegt, den Winkel gleicher Größe wie $\sphericalangle(s_1, s_2)$ an und bringt seinen zweiten Schenkel zum Schnitt C' mit s_3.
4. Man trägt in A' an A'C' nach derjenigen Seite, auf der S nicht liegt, den Winkel der Größe 60° an und bringt seinen zweiten Schenkel zum Schnitt B' mit s_2.
5. Man konstruiert auf dem Strahl aus A' durch C' den Punkt D mit $\overline{A'D} = c$.
6. Man konstruiert die Parallele durch D zu s_1 und bringt sie zum Schnitt C mit s_3.
7. Man konstruiert die Parallelen durch C zu C'A' und C'B' und bringt sie zum Schnitt A bzw. B mit s_1 bzw. s_2.

(c) Wenn ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt:
Nach 2. ist $\overline{A'S'} = \overline{A'S}$, nach 3. ist $\overline{\sphericalangle A'S'C'} = \overline{\sphericalangle A'SB'}$, nach 2. und 4. ist $\overline{\sphericalangle S'A'C'} = 60^\circ + \overline{\sphericalangle SA'C'} = \overline{\sphericalangle SA'B'}$. Damit folgt $\triangle S'A'C' \cong \triangle SA'B'$, also $\overline{A'C'} = \overline{A'B'}$; hiernach und nach $\overline{\sphericalangle C'A'B'} = 60^\circ$ ist A'B'C' ein gleichseitiges Dreieck.
Nach 6. und 7. liegt A auf s_1, B auf s_2, C auf s_3; ferner ist AA'DC ein Parallelogramm, so daß zusammen mit 5. auch $\overline{AC} = \overline{A'D} = c$ folgt.
Aus 7. folgt nach dem Strahlensatz $\overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{SC} : \overline{SC'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$, wegen $\overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ also $\overline{AC} = \overline{BC}$, und nach dem Stufenwinkelsatz folgt $\overline{\sphericalangle ACB} = \overline{\sphericalangle A'C'B'} = 60^\circ$. Daher ist auch das Dreieck ABC gleichseitig.

Bemerkungen:
Einige Konstruktionsschritte können auch detaillierter dargestellt werden (z. B. statt 2.: Konstruktion der Kreise um A' durch S und um S durch A', Wahl des Schnittpunktes S' auf der Seite von A'S, auf der s_3 nicht liegt). Andererseits kann man Konstruktionsschritte stärker zusammenfassen, z. B. 5. bis 7. als zentrische Streckung oder Stauchung mit dem Zentrum S und dem Faktor $c : \overline{A'C'}$. Konstruktion und Beweis können insgesamt auch damit beschrieben bzw. begründet werden, daß eine Drehung um 60° mit dem Drehzentrum A' durchgeführt wird, bei der B' in C' und S in S' übergeht. Wird statt des geforderten Beweises (c) umgekehrt von der Annahme, (etwa) A'B'C' sei gleichseitig, auf die Konstruktion geschlossen, so kann dies als Darstellung von Teilschritten einer geforderten Lösung gewertet werden. Für eine Wertung als vollständige Lösung zu (c) ist zu beachten, ob aus der Darstellung die Möglichkeit des Umkehrens hervorgeht (z. B. vermittels einer Drehung im entgegengesetzten Drehsinn).

L 9;II

Ein <u>zweiter Lösungsweg</u> kann folgende Konstruktion verwenden: Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck $A^*B^*C^*$ der Seitenlänge c. Dann konstruiert man den Kreisbogen $\overset{\frown}{A^*C^*}$ aller derjenigen Punkte X, die (beispielsweise) nicht auf derselben Seite von A^*C^* liegen wie B^* und für die $\overline{\sphericalangle A^*XC^*} = \overline{\sphericalangle(s_1,s_3)}$ ist (bekannte Anwendung des Peripherie-Zentriwinkelsatzes). Ebenso konstruiert man den Kreisbogen B^*C^* auf derselben Seite von $\overset{\frown}{B^*C^*}$ wie A^*, der den Peripheriewinkel $\overline{\sphericalangle(s_2,s_3)}$ faßt. Ist S^* ein Schnittpunkt beider Kreisbögen, so trägt man $\overline{S^*A^*}$, $\overline{S^*B^*}$, $\overline{S^*C^*}$ von S aus auf s_1, s_2, s_3 ab.