XXX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>300921</u>

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen $x \neq 3$, für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10}. \qquad (1)$$

<u>300922</u>

Man untersuche, ob es ein Rechteck ABCD mit einander gegenüberliegenden Ecken A und C gibt, bei dem im Dreieck ABC die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ die Seite AB in deren Mittelpunkt schneidet.

<u>300923</u>

a) Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z. B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?

b) Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, daß man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?

c) Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

A 9

300924

Für jede natürliche Zahl $m \geqq 2$ sei folgendes Vorhaben betrachtet: Jemand möchte m verschiedene von einem Punkt P ausgehende Strahlen zeichnen. Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen 0° und 360° feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können.

Er möchte die m Strahlen so zeichnen, daß sich dabei

a) möglichst wenige,

b) möglichst viele

verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von m die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

XXX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

300921) Lösung: **9 Punkte**

I. Angenommen, für eine reelle Zahl $x \neq 3$ gelte (1). Dann folgt:

1. Im Fall $x < 3$ ergibt sich durch Multiplikation mit der negativen Zahl $10 \cdot (x - 3)$

$$20 + 5(x - 3) > 50 - (x - 3),$$
$$6x > 48,$$
$$x > 8.$$

Im Fall $x < 3$ hat die Annahme, x erfülle (1), somit auf einen Widerspruch geführt.

2. Im Fall $x > 3$ folgt

$$20 + 5(x - 3) < 50 - (x - 3), \qquad (2)$$
$$6x < 48, \qquad (3)$$
$$x < 8. \qquad (4)$$

Daher kann (1) nur erfüllt werden, wenn

$$3 < x < 8 \qquad (5)$$

gilt.

II. Für jedes x mit $3 < x < 8$ folgt (4), (3), (2) und daraus nach Division durch die positive Zahl $10 \cdot (x - 3)$, daß (1) erfüllt ist.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß (1) genau von allen x mit (5) erfüllt wird.

2. Lösungsweg: (1) ist äquivalent mit

$$\frac{3}{x - 3} > \frac{3}{5}. \qquad (6)$$

Für $x < 3$ ist $\frac{3}{x - 3} < 0$, also (6) nicht erfüllt; für $x > 3$ ist (6) äquivalent mit $x - 3 < 5$ und dies mit $x < 8$.

3. Lösungsweg: Für alle $x \neq 3$ ist $10 \cdot (x - 3)^2$ positiv; daher ist (1) der Reihe nach äquivalent mit

$$20(x - 3) + 5(x - 3)^2 < 50(x - 3) - (x - 3)^2,$$

$$6x^2 - 66x + 144 < 0,$$

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 < \frac{25}{4},$$

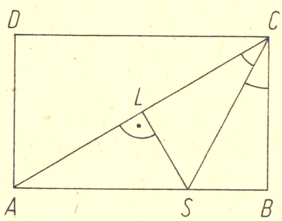
$$-\frac{5}{2} < x - \frac{11}{2} < \frac{5}{2},$$

$$3 < x < 8.$$

300922) Lösung: **9 Punkte**

Ist CS die genannte Winkelhalbierende und SL das Lot von S auf AC, so gilt $\triangle BCS \cong \triangle LCS$ (Übereinstimmung in CS, den Winkeln bei C und den rechten Winkeln bei B bzw. L), also $\overline{SB} = \overline{SL}$. Im rechtwinkligen Dreieck ASL ist $\overline{AS} > \overline{SL}$. Damit folgt $\overline{AS} > \overline{SB}$.
(Abb. L. 300922a)
Also gibt es kein Rechteck, in dem der Schnittpunkt S der genannten Winkelhalbierenden mit der Seite AB deren Mittelpunkt wäre.
(**Bemerkung:** Man kann $\overline{AS} > \overline{SB}$ auch aus $\overline{AC} > \overline{BC}$ und dem - als bekannter Sachverhalt zu zitierenden - Satz herleiten, daß die Winkelhalbierende CS die Seite AB im Verhältnis $\overline{AS} : \overline{SB} = \overline{AC} : \overline{CB}$ teilt.)

2. Lösungsweg: (Abb. L 300922b)
Sind E, M die Mittelpunkte von AB bzw. AC, so ist einerseits $\overline{EM} = \frac{1}{2}\overline{BC} < \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{MC}$, also $\overline{\sphericalangle ECM} < \overline{\sphericalangle MEC}$; andererseits $EM \parallel BC$, also $\overline{\sphericalangle MEC} = \overline{\sphericalangle ECB}$. Also ist CE nicht Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$; diese kann folglich nicht durch E gehen.



Abbl. L 300922a

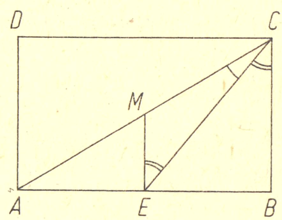


Abb. L 300922b

300923) Lösung: 11 Punkte

a) Als Hunderterziffer ist jede der Ziffern 2, 3, ..., 9 möglich. Als Zehnerziffer ist jeweils zu einer Hunderterziffer möglich: jede der Ziffern 1, 2, ..., 8, die kleiner als die Hunderterziffer ist. Für die Einerziffer gibt es jeweils zu einer Zusammenstellung von Hunderter- und Zehnerziffer so viele Möglichkeiten, wie es kleinere Ziffern als die Zehnerziffer gibt. Das sind jeweils ebenso viele, wie die betreffende Zehnerziffer selbst angibt. Damit ergeben sich die folgenden Anzahlen:

Zusammenstellung von Hunderter- und Zehnerziffer	Anzahl möglicher Einerziffern	
21	1	= 1
31,32	1+2	= 3
41,42,43	1+2+3	= 6
51,52,53,54	1+2+3+4	= 10
61,62,63,64,65	1+2+3+4+5	= 15
71,72,73,74,75,76	1+2+3+4+5+6	= 21
81,82,83,84,85,86,87	1+2+3+4+5+6+7	= 28
91,92,93,94,95,96,97,98	1+2+3+4+5+6+7+8	= 36
		120

Somit gibt es insgesamt 120 dreistellige Zahlen der genannten Art.

b) Denkt man sich diese 120 Zahlen der Größe nach geordnet, angefangen mit der kleinsten, dann lassen sich
an die kleinste genau 119 verschiedene Zahlen anhängen,
an die zweitkleinste genau 118 verschiedene Zahlen anhängen,
....,
an die zweitgrößte genau 1 Zahl anhängen,
an die größte keine Zahl anhängen,
wenn man die Bedingungen der Aufgabe einhält. Dadurch entstehen insgesamt 1 + 2 + 3 + ... + 118 + 119 = 7140 sechsstellige Zahlen der genannten Art.

c) Für jede derjenigen sechsstelligen Zahlen, aus denen gemäß (c) die kleinste zu finden ist, gilt: Sind x, y, z ihre ersten drei Ziffern, so liegen die nächsten drei Ziffern eindeutig fest (sie sind nämlich die Ziffern der um 1 größeren Zahl), also hat keine andere der genannten sechsstelligen Zahlen ebenfalls x, y, z als ihre ersten drei Ziffern. Daher ist von je

zwei der genannten sechsstelligen Zahlen diejenige die kleinere, für die bereits die aus den ersten drei Ziffern gebildete dreistellige Zahl die kleinere ist.
Zählt man die in a) genannten dreistelligen Zahlen der Größe nach auf, so beginnt die Aufzählung mit

210, 310, 320, 321, ...

Unter diesen scheiden zur Bildung von in c) genannten Zahlen 210 und 310 aus, da die Zahlen 210 + 1 = 211, 310 + 1 = 311 nicht zu den in a) genannten gehören. Hiernach ist die kleinste nicht ausscheidende Zahl 320. Sie führt somit zu der in c) gesuchten kleinsten Zahl 320321.

<u>Bemerkung:</u> Die Aufgaben (a) und (b) können auch mit - als bekannter Sachverhalt herangezogenen - Mitteln der Kombinatorik gelöst werden:

(a) Es handelt sich um die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von 10 Elementen zur 3. Klasse. Diese beträgt
$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$

(b) Es handelt sich um die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von 120 Elementen zur 2. Klasse. Diese beträgt
$\binom{120}{2} = \frac{120 \cdot 119}{1 \cdot 2} = 7140.$

<u>300924) Lösung:</u> <u>11 Punkte</u>

a) Die kleinstmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen ist m-1.
Beweis: I. Für jede Wahl von m Strahlen $s_0, \dots, s_{m-1}$ beträgt diese Anzahl mindestens m-1; denn mindestens die Größen der m-1 Winkel $\sphericalangle(s_0, s_1), \dots, \sphericalangle(s_0, s_{m-1})$ sind sämtlich voneinander verschieden.
II. Das Auftreten von genau m-1 verschiedenen Winkelgrößen kann durch folgende Wahl erreicht werden: Man setze $\varphi = \frac{360^\circ}{m}$ und wähle die Strahlen $s_0, \dots, s_{m-1}$ so, daß jeweils $\sphericalangle(s_0, s_i)$ die Größe $i \cdot \varphi$ hat $(i = 1, \dots, m-1)$. Dann gilt:
Für $0 \leqq i < j < m$ hat $\sphericalangle(s_i, s_j)$ die Größe $(j - i) \cdot \varphi$,
für $0 \leqq j < i < m$ hat $\sphericalangle(s_i, s_j)$ die Größe $360^\circ - (i - j) \cdot \varphi =$
$= (m - (i - j)) \cdot \varphi$.
Aus $0 \leqq i < j < m$ folgt aber $0 < j - i < m - i \leqq m$;
aus $0 \leqq j < i < m$ folgt ebenso $0 < i - j < m$, also
$0 < m - (i - j) < m$.
Somit treten als Größen der Winkel $\sphericalangle(s_i, s_j)$ $(i \neq j)$ nur die Werte $k \cdot \varphi$ mit den $m-1$ ganzen Zahlen k auf, für die $0 < k < m$ gilt.

L 9

b) Die größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen ist $m \cdot (m-1)$.

Beweis: I. Für jede Wahl von m Strahlen $s_0, \ldots, s_{m-1}$ beträgt diese Anzahl höchstens $m \cdot (m-1)$; denn zu jedem der m Strahlen s_i gibt es genau $m-1$ Strahlen s_j mit $j \neq i$. Also ist $m \cdot (m-1)$ die Anzahl aller Winkel $\sphericalangle(s_i, s_j)$ mit $i \neq j$; die Anzahl ihrer verschiedenen Größen kann nicht größer sein.

II. Das Auftreten von $m \cdot (m-1)$ verschiedenen Winkelgrößen kann durch folgende Wahl erreicht werden: Man setze $\alpha = \frac{360^\circ}{2^m}$ und wähle die Strahlen $s_0, \ldots, s_{m-1}$ so, daß jeweils $\sphericalangle(s_0, s_i)$ die Größe $(2^i - 1) \cdot \alpha$ hat $(i = 1, \ldots, m-1)$. Dann gilt:

Für $0 \leqq i < j < m$ hat $\sphericalangle(s_i, s_j)$ die Größe $(2^j - 2^i) \cdot \alpha$. Ist nun (i', j') ein von (i, j) verschiedenes Paar mit $0 \leqq i' < j' < m$, so beweist man folgendermaßen $2^j - 2^i \neq 2^{j'} - 2^{i'}$: In den Fällen $i = i'$, $j \neq j'$ und $i \neq i'$, $j = j'$ ist dies unmittelbar klar. Ist aber $i \neq i'$, $j \neq j'$ und dabei o.B.d.A. etwa $j < j'$, so gilt entweder $i' = j$, also

$$2^{i'} + 2^j - 2^i = 2^{j+1} - 2^i \leqq 2^{j'} - 2^i < 2^{j'};$$

oder i', j, i sind drei voneinander verschiedene natürliche Zahlen kleiner als j', und es folgt

$$2^{i'} + 2^j - 2^i < 2^{i'} + 2^j + 2^i \leqq 1 + 2^1 + \ldots + 2^{j'-1} =$$
$$= 2^{j'} - 1 < 2^{j'}.$$

Daher haben alle Winkel $\sphericalangle(s_i, s_j)$ mit $0 \leqq i < j < m$ unterschiedliche Größen. Alle diese Größen sind kleiner als $2^{m-1} \cdot \alpha = 180^\circ$.

Für $0 \leqq j < i < m$ hat jeweils $\sphericalangle(s_i, s_j)$ die Größe $360^\circ - \gamma_{ji}$, wo γ_{ji} die Größe von $\sphericalangle(s_j, s_i)$ ist. Also haben alle Winkel $\sphericalangle(s_i, s_j)$ mit $0 \leqq j < i < m$ ebenfalls unterschiedliche Größen, und alle diese Größen sind größer als 180°.

Damit ist die Verschiedenheit der Größen aller $\sphericalangle(s_i, s_j)$ $(i \neq j)$ nachgewiesen.

Bemerkungen: Zu a)II. kann auch in mehr anschaulicher Weise argumentiert werden (Betrachtung der zu einem regelmäßigen m-Eck auftretenden Zentriwinkel).

Zu b)II. gibt es verschiedene andere Lösungsansätze. Beispielsweise kann man von in a)II. gewählten φ, s_i ausgehen und jeweils den Strahl s_i um $\frac{1}{2^i} \cdot \beta$ weiterdrehen, wobei β eine fest gewählte Winkelgröße mit $0 < \beta < \frac{\varphi}{2}$ ist. Bei manchen Ansätzen, auch im obigen Beweis, läßt sich die rechnerische Ausführung auch günstig unter Verwendung der Zifferndarstellung im Dualsystem formulieren.

Die oben benötigte Ungleichung $2^j-2^i \neq 2^{j'}-2^{i'}$ folgt für $i \neq i'$ auch einfacher daraus, daß der Primfaktor 2 links bzw. rechts genau in der Potenz i bzw. i' enthalten ist. (Dabei sind Fälle, in denen $2^0 = 1$ auftritt, sinngemäß einzuordnen.)

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

300921

Rechnerisch richtige Formeln zur Gewinnung von $3 < x < 8$	5
Ausreichende Darstellung logisch korrekter und vollständiger Herleitung (z. B. Beachtung von Voraussetzungen beim Multiplizieren von Ungleichungen, erkennbare Hin- und Rückschluß- oder Äquivalenzberücksichtigung)	$\underline{4}$
	9

300922

Ansatz und Herleitung erster Zusammenhänge (z. B. $\triangle BCS \cong \triangle LCS$ oder $\overline{EM} < \overline{MC}$)	4
Weitere Herleitung einer wesentlichen Hilfsaussage (z. B. $\overline{AS} > \overline{BS}$ oder $\sphericalangle ECM < \sphericalangle ECB$)	3
Abschließende Gewinnung der (verneinenden) Antwort	$\underline{2}$
	9

300923

a) Ermittlung der Anzahl 120	3
b) Ermittlung der Anzahl 7140	3
c) Erkenntnis, daß die Reihenfolge der aus den Anfangsziffern sechsstelliger Zahlen gebildeten dreistelligen Zahlen wesentlich (zum Aufsuchen der gesuchten kleinsten sechsstelligen Zahl) ist	2
Durchführung der auf diesem Sachverhalt beruhenden (auch falls er nicht ausformuliert wurde) Ermittlung von 320321	$\underline{3}$
	11

300924

a) Erkenntnis, daß stets mindestens m-1 Winkelgrößen auftreten	2
Aufweisen der Existenz von m Strahlen mit genau m-1 paarweise verschiedenen Winkelgrößen	2
b) Erkenntnis, daß stets höchstens m(m-1) Winkelgrößen auftreten	3
Aufweisen der Existenz von m Strahlen mit (mindestens, also genau) m(m-1) paarweise verschiedenen Winkelgrößen	$\underline{4}$
	11