XXX. Olympiade Junger Mathematiker
3. Stufe
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>300831</u>

Ermittle die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, ..., 9 genau einmal enthalten und durch 45 teilbar sind!

<u>300832</u>

Gegeben seien drei verschiedene Sorten von Kugeln; von jeder Sorte seien 100 Stück vorhanden:

Sorte A: Kugeln mit einer Masse von 0,3 g je Stück,
Sorte B: Kugeln mit einer Masse von 1,5 g je Stück,
Sorte C: Kugeln mit einer Masse von 7,0 g je Stück.

Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Kugeln genau 100 so auszuwählen, daß ihre Gesamtmasse genau 100 g beträgt! Wenn das der Fall ist, so ermittle alle derartigen Möglichkeiten für die drei Anzahlen, die man jeweils aus Kugeln der Sorten A, B und C auszuwählen hat!

<u>300833</u>

Aus drei gegebenen Längen $c = 8$ cm; $s_a = 6$ cm, $s_b = 7$ cm soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Dabei wird gefordert:

Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = c$. (1)
Die Seitenhalbierende AD der Seite BC hat die Länge $\overline{AD} = s_a$. (2)
Die Seitenhalbierende BE der Seite AC hat die Länge $\overline{BE} = s_b$. (3)

(a) Konstruiere ein Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!
(b) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).

XXX. Olympiade Junger Mathematiker
3. Stufe
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

300834

Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und n^2+1 eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

300835

(a) Beweise den folgenden Satz:
In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.

(b) Gib an, ob die Umkehrung dieses Satzes gilt, und beweise die Richtigkeit deiner Angabe!

300836

Im Raum seien zwölf Punkte derart gegeben, daß keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören!

Hinweis: Jedes Tetraeder ist durch die Menge seiner vier Eckpunkte (die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen) eindeutig bestimmt; irgendwelche Anforderungen an die Reihenfolge oder die gegenseitigen Abstände der Eckpunkte gibt es nicht.

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

300831) Lösung: 6 Punkte

Jede natürliche Zahl, die jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal enthält, hat wegen $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ die Quersumme 45 und ist damit durch 9 teilbar.

Von diesen Zahlen sind folglich diejenigen, deren Anzahl gesucht ist, wegen $45 = 9 \cdot 5$ (sowie wegen der Teilerfremdheit von 9 und 5) genau die durch 5 teilbaren. Das sind genau diejenigen, deren letzte Ziffer 5 lautet, da die Ziffer 0 nach Aufgabenstellung nicht vorkommt. Um die gesuchte Anzahl zu ermitteln, muß man somit untersuchen, wieviele verschiedene Anordnungen sich aus den restlichen acht Ziffern bilden lassen[1]:

Unter Verwendung zweier Ziffern lassen sich genau zwei Anordnungen bilden (z. B. 12, 21). Bei Hinzunahme einer dritten Ziffer kann diese an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen. Folglich ergeben sich aus jeder der zwei Anordnungen (z. B. 12, 21) genau drei neue, insgesamt also $2 \cdot 3 = 6$ Anordnungen. Nimmt man nun eine vierte Ziffer hinzu, kann diese wiederum an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle in jeder der schon ermittelten sechs Anordnungen aus drei Ziffern auftreten. Folglich sind bei vier Ziffern genau $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Anordnungen möglich. Setzt man diese Überlegung fort, kommt man zu dem Schluß, daß sich unter Verwendung von acht Ziffern genau $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ Anordnungen bilden lassen.

Die gesuchte Anzahl beträgt somit 40 320.

---

1 Das Ergebnis des oben folgenden Absatzes kann auch begründet werden, indem als (z. B. aus Arbeitsgemeinschaften) bekannter Sachverhalt auf den Wert 8! für die Anzahl der Permutationen von 8 Elementen verwiesen wird.

300832) Lösung: 7 Punkte

Bei jeder Auswahl von Kugeln A und B haben diese zusammen eine Masse m, die gemessen in Zehntelgramm eine durch 3 teilbare Maßzahl hat. Um hierzu eine der in der Aufgabe gesuchten Möglichkeiten zu erhalten, muß man also eine Anzahl z von Kugeln C so wählen, daß die Masse dieser Kugeln C eine derartige Masse m zu 100 g ergänzt. Die kleinste Anzahl z, für die das zutrifft, ist z = 1, wie aus $100\ g - 1 \cdot 7\ g = 93{,}0\ g$ ersichtlich ist. Weitere derartige Anzahlen z von Kugeln C ergeben sich erst wieder, wenn man die Anzahl 1 um Vielfache von 3 erhöht. So entstehen die Anzahlen

$$z = 1,\quad 4,\quad 7,\quad 10,\quad \ldots \tag{1}$$

mit den für Kugeln A und B übrigbleibenden Massen

$$m = 93\ g,\quad 72\ g,\quad 51\ g,\quad 30\ g,\quad \ldots \tag{2}$$

Jede Anzahl $z = 13+n$ mit $n \geqq 0$ ergäbe eine Masse m von höchstens $100 - (13+n)\cdot 7 < 9 - 6{,}9 \cdot n$ Gramm. Selbst wenn man sie nur mit Kugeln A zusammenstellen würde, gäbe dies nicht mehr als $30-23n$ Kugeln A, also insgesamt nicht mehr als $(30-23n)+0+(13+n) = 43-22n$ Kugeln; bei Mitverwendung von Kugeln B wären es noch weniger. Da hiermit keine Gesamtzahl 100 erreicht wird, verbleiben nur die jeweils in (1) und (2) genannten vier Anfangswerte.

Hiervon scheiden der 1., 3. und 4. Wert aus; denn um diese Werte durch y Kugeln B und folglich (100-z-y) Kugeln A zu erreichen, müßte

$$(99-y)\cdot 0{,}3 + y\cdot 1{,}5 = 93, \quad y\cdot 1{,}2 = 63{,}3$$

bzw. $$(93-y)\cdot 0{,}3 + y\cdot 1{,}5 = 51, \quad y\cdot 1{,}2 = 23{,}1$$

bzw. $$(90-y)\cdot 0{,}3 + y\cdot 1{,}5 = 30, \quad y\cdot 1{,}2 = 3$$

gelten. Da dies nicht mit ganzzahligen y möglich ist, verbleibt in (1) und (2) nur jeweils der 2. Wert. Für ihn werden die Forderungen der Aufgabe genau dann erfüllt, wenn

$$(96-y)\cdot 0{,}3 + y\cdot 1{,}5 = 72,\ y\cdot 1{,}2 = 43{,}2,\ y = 36,\ 96-y = 60$$

gilt. Damit ist bewiesen: Es ist möglich, die Forderungen der Aufgabe zu erfüllen, und zwar werden sie genau mit

60 Kugeln A, 36 Kugeln B, 4 Kugeln C

erfüllt.

2. Lösungsweg:

Die Bedingungen der Aufgabe werden genau dann von x Kugeln A, y Kugeln B und z Kugeln C erfüllt, wenn die Gleichungen

L 8;I

$$x + y + z = 100 \quad (3)$$

und $3x + 15y + 70z = 1000$ (4)

gelten.

I. Werden (3), (4) durch natürliche Zahlen x,y,z erfüllt, so folgt: Aus (3), also $x = 100 - y - z$, ergibt sich durch Einsetzen in (4)

$$12y + 67z = 700. \quad (5)$$

Hiernach ist z durch 4 teilbar, außerdem folgt wegen $y \geqq 0$

$$67z \leqq 700 < 67 \cdot 11,$$

$$z < 11.$$

Wäre $z = 0$ oder $z = 8$, so führte (5) auf $12y = 700$ bzw. $12y = 164$, im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von y. Also verbleibt nur die Möglichkeit $z = 4$, wonach (5), (3) auf $y = 36$, $x = 60$ führen.

II. In der Tat erfüllen diese Werte wegen $60+36+4 = 100$ und $3 \cdot 60 + 15 \cdot 36 + 70 \cdot 4 = 180 + 540 + 280 = 1000$ die Gleichungen (3),(4).

300833)Lösung: 7 Punkte

(a) Abbildung L 300833 a zeigt ein nach folgender Beschreibung konstruiertes Dreieck:

1. Man konstruiert eine Strecke AB der Länge c.
2. Man verlängert die Strecke AB über B hinaus um ihre halbe Länge bis zum Punkt F.
3. Man konstruiert den Kreis um A mit s_a, den Kreis um F mit s_b und wählt einen Schnittpunkt dieser Kreise als D.

   Bemerkung: Statt der Konstruktionsschritte 1., 2., 3. kann auch zusammenfassend formuliert werden: Konstruktion eines Dreiecks AFD aus den Seitenlängen $\overline{AF} = \frac{3}{2}c$, $\overline{AD} = s_a$, $\overline{FD} = s_b$ (und Konstruktion von B auf AF mit $\overline{AB} = c$).

4. Man verlängert die Strecke BD über D hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt C.

(b) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt (siehe Abb. L 300833 b):
Nach Konstruktionsschritt 1. ist $\overline{AB} = c$, also (1) erfüllt.
Nach 4. ist D der Mittelpunkt, also AD die Seitenhalbierende von BC, und nach 3. gilt $\overline{AD} = s_a$; also ist (2) erfüllt.
Ist ferner E der Mittelpunkt, also BE die Seitenhalbierende von AC, so ist nach der Umkehrung des Strahlensatzes $ED \parallel AB$, und nach dem Strahlensatz sowie nach 2. folgt $\overline{ED} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{BF}$.
Also ist BFDE ein Parallelogramm; hieraus und aus 3. folgt $\overline{BE} = \overline{FD} = s_b$; d. h., auch (3) ist erfüllt.

<u>Hinweis:</u> Wenn in einer Lösungsdarstellung (nach Art einer üblichen Analyse) aus der Voraussetzung von (1),(2),(3) auf eine Konstruktion geschlossen wird, so sind zwar möglicherweise Teile dieser Beweisführung auch als Teile eines in (b) geforderten umgekehrten Beweises verwendbar und demgemäß mit entsprechenden Punktanteilen zu bewerten. Für die vollständige Vergabe der zu (b) vorgesehenen Punkte ist es jedoch erforderlich, daß der Text die geforderte Richtung des logischen Schließens erkennen läßt.

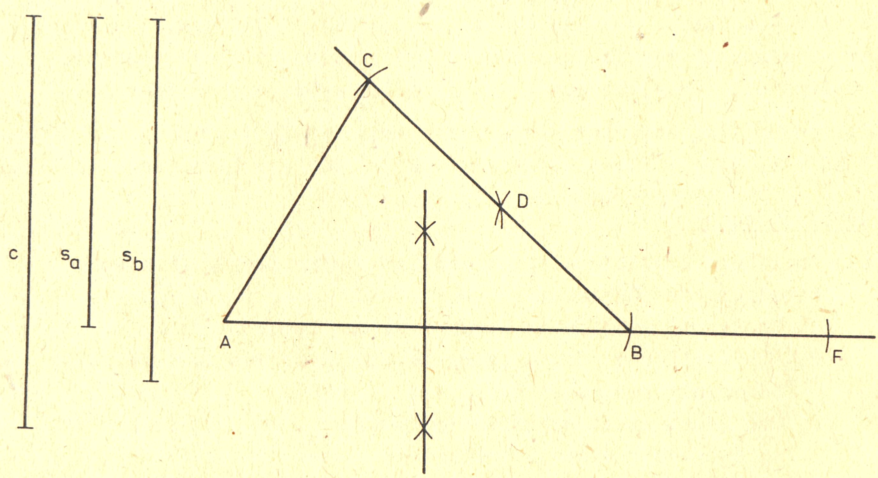

Abb. L 300833 a

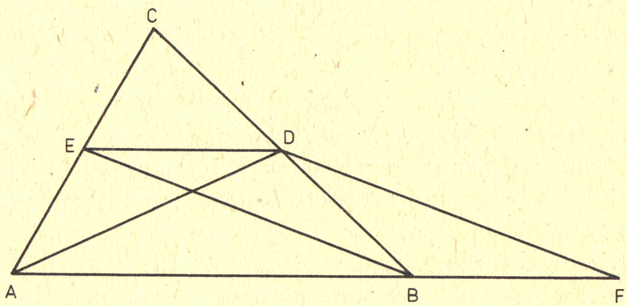

Abb. L 300833 b

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

300834)Lösung: 6 Punkte

Jede natürliche Zahl n ist mit einer geeigneten natürlichen Zahl k von einer der Formen $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$.
Ist $n = 5k$, so ist n durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k+1$, so ist $n-1 = 5k$ durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k+2$, so ist $n^2+1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$ durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k+3$, so ist $n^2+1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$ durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k+4$, so ist $n+1 = 5(k+1)$ durch 5 teilbar.
Damit ist der verlangte Beweis geführt.

300835)Lösung: 7 Punkte

(a) In einem Dreieck ABC sei $\overline{BC} > \overline{AC}$ vorausgesetzt.
Dann gibt es zwischen B und C einen Punkt D mit $\overline{AC} = \overline{DC}$ (siehe Abb. L 300835). Für ihn gilt

$$\overline{\sphericalangle CAB} > \overline{\sphericalangle CAD}. \qquad (1)$$

Ferner folgt nach dem Basiswinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle CAD} = \overline{\sphericalangle ADC} \qquad (2)$$

und nach dem Außenwinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle ADC} = \overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle BAD} > \overline{\sphericalangle ABC}. \qquad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\overline{\sphericalangle CAB} > \overline{\sphericalangle ABC},$$

w.z.b.w.

(b) Die Umkehrung lautet: In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln stets auch die größere Seite gegenüber.
Auch diese Umkehrung gilt. Beweis:
In einem Dreieck ABC sei

$$\overline{\sphericalangle CAB} > \overline{\sphericalangle ABC} \qquad (4)$$

vorausgesetzt. Wäre dann $\overline{BC} = \overline{AC}$, so folgte nach dem Basiswinkelsatz $\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle ABC}$; wäre $\overline{BC} < \overline{AC}$, so folgte nach dem unter (a) bewiesenen Satz $\overline{\sphericalangle CAB} < \overline{\sphericalangle ABC}$; beides im Widerspruch zu (4).
Damit ist bewiesen, daß aus (4) stets $\overline{BC} > \overline{AC}$ folgt.

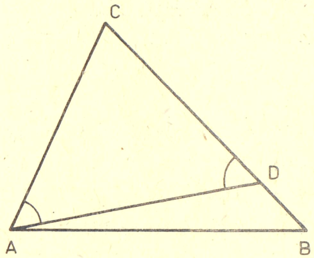

Abb. L 300835

300836)Lösung: 7 Punkte

Zu jedem der zwölf Punkte kann man einen der übrigen elf Punkte zusammenstellen und damit genau $12 \cdot 11$ geordnete Paare erhalten. Ebenso kann man genau $12 \cdot 11 \cdot 10$ bzw. $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ geordnete Zusammenstellungen von je 3 bzw. von je vier der zwölf Punkte erhalten.
Mit diesen Zusammenstellungen von je vier Punkten wird die Eckenmenge jedes der zu berücksichtigenden Tetraeders erfaßt, und zwar je 24mal. Sind nämlich A,B,C,D die Ecken eines der Tetraeder, so werden sie mit allen geordneten Zusammenstellungen dieser Punkte erfaßt. Deren Anzahl kann man folgendermaßen ermitteln: An den ersten Platz einer Zusammenstellung kann jeder der vier Punkte A,B,C,D gesetzt werden, bei jeder dieser Möglichkeiten bleibt für den zweiten Platz die Wahl unter drei der Punkte, und bei jeder der so entstandenen $4 \cdot 3$ Möglichkeiten bleibt für den dritten Platz die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten, wonach in jeder der $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ erhaltenen Möglichkeiten auch der vierte Platz feststeht.
Die gesuchte Anzahl der Tetraeder beträgt somit

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495.$$

Bemerkung: In der Begründung kann auch auf (z. B. aus Arbeitsgemeinschaften) bekannte Sachverhalte zurückgegriffen werden, z. B. auf die Anzahl 4! der Permutation von 4 Elementen oder die Anzahl

$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ der Kombinationen ohne Wiederholung von 12 Elementen zur 4. Klasse.