A 8

XXX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2 ~~3.~~ Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>300821</u>

In einem Garten stehen zwei Fässer mit Wasser. Jörg gießt aus dem ersten Faß so viele Liter Wasser in das zweite Faß, wie dort bereits enthalten sind. Anschließend gießt er aus dem zweiten Faß so viele Liter Wasser in das erste, wie sich dort nach dem vorigen Umgießen befinden. Nach diesen beiden Umfüllvorgängen befinden sich in jedem der beiden Fässer genau je 24 Liter Wasser.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, wie viele Liter Wasser sich anfangs in jedem der beiden Fässer befanden! Ist dies der Fall, so gib diese beiden Literzahlen an!

<u>300822</u>

Ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 1:2 zueinander verhalten, soll in acht einander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

a) Zeichne und beschreibe eine solche Zerlegung! Begründe, warum die nach deiner Beschreibung entstehenden acht Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig und einander kongruent sind!
b) Ermittle die Länge eines Schenkels dieser Dreiecke in Abhängigkeit von der kleineren der beiden Seitenlängen des Rechtecks!

300823

Jemand möchte in einer Ebene eine Anzahl n von Punkten zeichnen. Sie sollen so gewählt werden, daß keine drei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Anschließend will er Dreiecke suchen, deren sämtliche drei Ecken zu den gezeichneten n Punkten gehören.

Ermittle die kleinste Anzahl n solcher Punkte, für die es möglich ist, 120 verschiedene derartige Dreiecke zu finden!

300824

Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 99999 derart hintereinander aufgeschrieben, daß die Ziffernndarstellung einer Zahl z entsteht.

Der Beginn dieser Darstellung lautet

$$z = 123456789101112131415 \ldots;$$

beispielsweise an der elften Stelle steht die Ziffer 0, die Ziffer 2 tritt z. B. an der zweiten Stelle, an der 15ten Stelle und noch an weiteren Stellen von z auf.

Welche Ziffer steht an der 206788sten Stelle von z?

XXX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

300821) Lösung: **9 Punkte**

Wenn sich am Schluß in jedem der beiden Fässer 24 Liter befinden und mit dem zweiten Umfüllen die Wassermenge des ersten Fasses verdoppelt wurde, dann müssen sich wegen $24 : 2 = 12$ vor dem zweiten Umfüllen in diesem Faß 12 Liter Wasser befunden haben. Da die gesamte in den Fässern vorhandene Wassermenge 48 Liter beträgt, waren wegen $48 - 12 = 36$ in dem zweiten Faß zu diesem Zeitpunkt 36 Liter.

Ferner war mit dem ersten Umfüllen die Wassermenge im zweiten Faß verdoppelt worden. Daraus ergibt sich, daß für die Wassermengen, die anfangs in den Fässern waren, eindeutig folgt: Wegen $36 : 2 = 18$ waren im zweiten Faß 18 Liter und wegen $48 - 18 = 30$ im ersten Faß 30 Liter.

Anderer Lösungsweg:

Waren zu Beginn im zweiten Faß x Liter, so waren im ersten Faß $(48 - x)$ Liter. Die folgende Tabelle zeigt die Literzahlen, die bei den beiden Umfüllvorgängen auftraten:

	Umgefüllte Menge	Nach dem Umfüllen vorhandene Menge	
		im 1. Faß	im 2. Faß
1. Umfüllen	x	$(48-x)-x=48-2x$	$x+x = 2x$
2. Umfüllen	$48-2x$	$2\cdot(48-2x)=96-4x$	$2x-(48-2x)=4x-48$

Da sich nach dem zweiten Umfüllen im zweiten Faß 24 Liter befinden, folgt

$$4x - 48 = 24,$$
$$x = 18.$$

Also folgt eindeutig, daß die gesuchten Literzahlen für das erste Faß $48 - x = 30$ und für das zweite Faß $x = 18$ betragen.

300822) Lösung: **11 Punkte**

a) Abbildung L 300822 zeigt für ein Rechteck ABCD eine mögliche Zerlegung der geforderten Art.

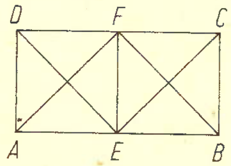

Abb. L 300822

Beschreibung: Sind E, F die Mittelpunkte von AB bzw. CD, so entsteht die Zerlegung, indem die Strecken EF, AF, DE, BF und CE gezeichnet werden.

Begründung: Da ABCD ein Rechteck ist und E, F die Strecken AB bzw. CD halbieren, folgt aus der Voraussetzung $\overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 2$: Die Strecken AE und DF sind gleichlang und parallel zueinander, die Strecken AE und AD sind gleichlang und senkrecht zueinander; also ist AEFD ein Quadrat.

Ebenso folgt: EBCF ist ein Quadrat. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichneten Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt.

Da in jedem Quadrat die Diagonalen gleichlang und senkrecht zueinander sind und einander halbieren, sind alle acht entstandenen Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig mit einander gleichen Kathetenlängen, also auch einander kongruent.

b) In Abhängigkeit von $a = \overline{AD}$ hat das Quadrat AEFD den Flächeninhalt a^2. Jedes seiner vier einander (kongruenten, also) flächeninhaltsgleichen Teildreiecke hat folglich den Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$. Ist x die gesuchte Kathetenlänge dieser Dreiecke, so ist andererseits der Flächeninhalt gleich $\frac{1}{2}x^2$. Daher gilt

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}a^2,$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} \quad \left(= a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{2}\right).$$

(Dieses Ergebnis kann auch mit dem Satz des Pythagoras erhalten werden; dieser kann als - z. B. aus Arbeitsgemeinschaften - bekannter Sachverhalt herangezogen werden.)

300823) Lösung: 9 Punkte

Hat man n Punkte wie angegeben gezeichnet, so kann man zu jedem dieser n Punkte einen der übrigen n-1 Punkte aufsuchen und damit genau $n \cdot (n-1)$ geordnete Paare von Punkten erhalten. Ebenso kann man zu jedem dieser Paare einen der darin nicht vorkommenden n-2 Punkte aufsuchen und damit genau $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ geordnete Zusammenstellungen (Tripel) von je drei der n Punkte erhalten.

Mit diesen Zusammenstellungen wird die Eckenmenge jedes aufzufindenden Dreiecks erfaßt, und zwar je 6mal. Sind nämlich A, B, C die Ecken eines solchen Dreiecks, so werden sie genau mit den 6 geordneten Zusammenstellungen ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA erfaßt.

Daher lassen sich insgesamt $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ Dreiecke finden, deren sämtliche Ecken zu den n Punkten gehören. Für $n = 10$ ist diese Anzahl $\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 120$, für $n < 10$ ist sie kleiner als 120. Die kleinste Anzahl n, für die es möglich ist, 120 derartige Dreiecke zu finden, beträgt daher $n = 10$.

Bemerkung: Die Anzahlformel $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$, auch in der Gestalt $\binom{n}{3}$, kann auch als (z. B. aus einer Arbeitsgemeinschaft) bekannter Sachverhalt, nämlich als Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur Klasse 3, zitiert werden.

300824) Lösung: 11 Punkte

Unter den aufgeschriebenen Zahlen gibt es genau 9 einstellige, genau $99 - 9 = 90$ zweistellige, genau $999 - 99 = 900$ dreistellige, genau $9999 - 999 = 9000$ vierstellige und genau $99999 - 9999 = 90000$ fünfstellige Zahlen. In der damit aufgeschriebenen Ziffernfolge für z nehmen die einstelligen Zahlen die ersten 9 Stellen ein, die zweistelligen Zahlen die nächsten $2 \cdot 90 = 180$ Stellen, die dreistelligen Zahlen die nächsten $3 \cdot 900 = 2700$ Stellen, die vierstelligen Zahlen die nächsten $4 \cdot 9000 = 36000$ Stellen und die fünfstelligen Zahlen die nächsten $5 \cdot 90000 = 450000$ Stellen. Da somit die ein- bis vierstelligen Zahlen wegen

$$9 + 180 + 2700 + 36000 = 38889$$

die ersten 38889 Stellen einnehmen, die ein- bis fünfstelligen Zahlen jedoch wegen

$$38889 + 450000 = 488889$$

die Stellen bis zur 488889sten einnehmen, kommt die Ziffer an der 206788sten Stelle von z wegen

$$38889 < 206788 < 488889$$

in einer der aufgeschriebenen fünfstelligen Zahlen vor.
Um festzustellen, in welcher, bilden wir die Differenz

$$206788 - 38889 = 167899$$

und führen die Division von 167899 durch 5 mit Rest aus. Damit erhalten wir, daß

$$167899 = 5 \cdot 33579 + 4$$

gilt, und es folgt: Der gesuchten Ziffer gehen 33579 fünfstellige Zahlen voran, und sie ist in der dann folgenden, also 33580sten fünfstelligen Zahl die vierte Ziffer. Da die fünfstelligen Zahlen mit der Zahl 1000 beginnen, lautet die 33580ste von ihnen 43579.
Ihre vierte Ziffer ist 7.
Somit steht an der 206788sten Stelle von z die Ziffer 7.

L 8

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 8 Gesamtpunktzahl: 40

300821

Erster Lösungsschritt (z. B. Zustand nach dem ersten Umfüllen oder - bei anderer Lösungskonzeption - z. B. Oberführung in eine Gleichung für eine zuvor erklärte Unbekannte)	5
Zweiter, abschließender Lösungsschritt	4
	9

300822

a) Zeichnung	3
Beschreibung	2
Begründung: Gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke	2
Begründung: Kongruenz der Dreiecke	1
b) Ermittlung der Schenkellänge	3
	11

300823

Herleitung der (explizit als Formel oder auch anders, implizit formulierten) Abhängigkeit der Anzahl der Dreiecke von der Anzahl n	5
Herleitung der minimalen Anzahl n = 10	4
	9

300824

Herleitung, daß eine Ziffer einer fünfstelligen Zahl gesucht ist:	
Darstellung, in welcher Weise die Summen der Stellenzahlen der 1-, 2-, ...stelligen Zahlen berücksichtigt werden	3
Rechnerische Ausführung dieses Ermittlungsteiles	3
Herleitung, welche Ziffer in welcher der fünfstelligen Zahlen die gesuchte ist	5
	11