XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

291231

Man beweise: Wenn n eine natürliche Zahl größer als 2 ist und wenn $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen sind, die $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1$ und $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$ erfüllen, dann ist stets n durch 4 teilbar.

291232

Ist ABCD ein Tetraeder, so bezeichne R den Radius seiner Umkugel (d. h. derjenigen Kugel, auf der die Punkte A, B, C, D liegen) und r den Radius seiner Inkugel (d. h. derjenigen Kugel, deren Mittelpunkt im Innern des Tetraeders liegt und die jede der Flächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Man beweise, daß es unter allen Tetraedern ABCD mit $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$ auch solche gibt, für die das Verhältnis R:r einen kleinsten Wert annimmt; man ermittle diesen Wert.

Von den nachstehenden Aufgaben 291233A und 291233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

291233 A

Auf der Randlinie eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge 1 m bewegen sich drei Punkte P_1, P_2, P_3, und zwar P_1 mit der Geschwindigkeit 1 m/s, P_2 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2}$ m/s, P_3 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{3}$ m/s. Zu Beginn (Zeitpunkt t = 0) befindet sich P_1 in A, P_2 in B und P_3 in C. Die Bewegungsrichtung ist bei allen drei Punkten einheitlich stets im Umlaufssinn von A nach B, von B nach C, von C nach A.

A 11/12;I

Man untersuche, ob es einen Zeitpunkt $t > 0$ gibt, zu dem P_1, P_2, P_3 wieder die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind (wobei auch der Fall $P_1 = P_2 = P_3$ als Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks aufgefaßt werde).

<u>291233 B</u>

Man untersuche für jede gegebene natürliche Zahl $n \geqq 2$, ob es unter allen denjenigen n-Tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen, für die

$$x_i \geqq \frac{1}{n^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$

gilt, eines gibt, für das der Term

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$$

a) einen kleinsten Wert,

b) einen größten Wert

annimmt. Ist das jeweils der Fall, so ermittle man in Abhängigkeit von n diesen kleinsten bzw. größten Wert.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

291234

Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen a, mit denen die durch

$$x_1 = \sqrt{a},$$

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist; man ermittle zu jeder solchen Zahl a den Grenzwert der Folge (x_n).

291235

Man beweise: In jeder Menge aus fünf Punkten, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und von denen keine drei in einer gemeinsamen Geraden liegen, gibt es vier Punkte, die die Ecken einer konvexen Vierecksfläche sind.

Hinweis: Eine Vierecksfläche heißt genau dann konvex, wenn mit jedem beliebigen Paar von Punkten dieser Fläche jeder Punkt der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zu der Fläche gehört.

291236

Man beweise: Schreibt man alle natürlichen Zahlen n mit $111 \leq n \leq 999$ in beliebiger Reihenfolge hintereinander auf, so erhält man stets die Ziffernfolge einer durch 37 teilbaren Zahl.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

291231) Lösung: 5 Punkte

Nach Voraussetzung ist jede der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und folglich auch jede der Zahlen

$$p_1 = a_1a_2,\quad p_2 = a_2a_3,\quad \ldots,\quad p_{n-1} = a_{n-1}a_n,\quad p_n = a_na_1$$

gleich 1 oder -1. Wegen $p_1 + \ldots + p_n = 0$ muß die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $p_1, \ldots, p_n$, die gleich 1 sind, ebenso groß sein wie die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $p_1, \ldots, p_n$, die gleich -1 sind. Bezeichnet man diese Anzahl mit k, so gilt also

$$n = 2k. \qquad (1)$$

Ferner ist

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}p_n = a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}a_n \cdot a_na_1 = a_1^2 \cdot \ldots \cdot a_n^2 = 1 > 0,$$

also muß die Anzahl k derjenigen unter den Zahlen $p_1, \ldots, p_n$, die negativ sind, eine gerade Zahl sein. Hieraus und aus (1) folgt:

n ist durch 4 teilbar, w.z.b.w.

291232) Lösung: 8 Punkte

Nach Voraussetzung kann man zu jedem in Betracht zu ziehenden Tetraeder ABCD ein rechtwinkliges Koordinatensystem so wählen, daß A der Nullpunkt ist und B,C,D auf der positiven x-, y- bzw. z-Achse liegen, also mit positiven Zahlen b,c,d die Koordinaten (b,0,0), (0,c,0) bzw. (0,0,d) haben.

Für den Radius R und den Mittelpunkt (x,y,z) der Umkugel gilt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x-b)^2 + y^2 + z^2 \\ &= x^2 + (y-c)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2; \end{aligned}$$

daraus folgt

$$x = \frac{b}{2}, \quad y = \frac{c}{2}, \quad z = \frac{d}{2},$$

$$R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}. \tag{1}$$

Für den Radius r und den Mittelpunkt der Inkugel gilt, daß dieser Mittelpunkt die Koordinaten (r,r,r) hat und daß er von der durch B,C,D gehenden Ebene den Abstand r hat und auf derselben Seite dieser Ebene liegt wie der Punkt A. Eine Gleichung dieser Ebene ist $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{d} = 1$; diejenige Hessesche Normalform, bei der der Nullpunkt positiven Abstand von der Ebene hat, ist folglich

$$\frac{1}{\sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} (- cdx - dby - bcz - bcd) = 0.$$

Daher ist die Bedingung, daß der Punkt (r,r,r) von dieser Ebene den Abstand r hat und auf derselben Seite dieser Ebene wie A liegt, äquivalent mit

$$\frac{1}{\sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} (- cdr - dbr - bcr + bcd) = r.$$

Daraus folgt

$$r = \frac{bcd}{cd + db + bc + \sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}}. \tag{2}$$

Nach (1) und (2) ist

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2bcd} \cdot (cd + db + bc + \sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}) \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}.$$

Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt

$$cd + db + bc \geqq 3 \cdot \sqrt[3]{cd \cdot db \cdot bc}, \tag{3}$$

$$c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2 \geqq 3 \sqrt[3]{c^2d^2 \cdot d^2b^2 \cdot b^2c^2}, \tag{4}$$

$$b^2 + c^2 + d^2 \geqq 3 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot c^2 \cdot d^2}, \tag{5}$$

also

$$\frac{R}{r} \geqq \frac{1}{2bcd} \cdot (3 \cdot \sqrt[3]{b^2c^2d^2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{b^4c^4d^4}) \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{b^2c^2d^2}$$

$$= \frac{1}{2bcd} (3 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{b^2c^2d^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{bcd}$$

$$= \frac{3}{2} (1 + \sqrt{3}). \tag{6}$$

Im Fall b = c = d gilt in (3), (4), (5) und folglich in (6) das Gleichheitszeichen.

Damit ist bewiesen, daß $R:r$ einen kleinsten Wert annimmt; er beträgt $\frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$.

Bemerkungen: Das Gleichheitszeichen wird nur im Fall $b = c = d$ angenommen; diese Feststellung ist hier nicht erforderlich.
Man kann (1) und (2) auch ohne analytische Geometrie herleiten: Ergänzt man ABCD zum Quader ABD'CDC'A'B', so hat dieser (wie jeder Quader) eine Umkugel; diese ist also die Umkugel von ABCD; ihr Durchmesser ist die Körperdiagonalenlänge $\overline{AA'} = \sqrt{b^2+c^2+d^2}$ des Quaders.

Für den Inkugelradius r, den Oberflächeninhalt F und das Volumen V des Tetraeders gilt $V = r \cdot F$ (dies kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder durch Zerlegen von ABCD in vier Pyramiden mit dem Inkugelmittelpunkt als gemeinsamer Spitze bewiesen werden). Daher kann man r aus $V = \frac{1}{6}bcd$ und $F = \frac{1}{2}(cd+db+bc) + F_1$ berechnen, wenn man zuvor noch den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks BCD durch b,c,d ausdrückt. Hierzu kann man z. B.
die Heronische Formel mit $\overline{CD} = \sqrt{c^2+d^2}$, $\overline{DB} = \sqrt{d^2+b^2}$, $\overline{BC} = \sqrt{b^2+c^2}$ anwenden oder man kann für den Schnittpunkt E von BC mit der senkrecht zu BC durch AD gelegten Ebene nach Sätzen über rechtwinklige Dreiecke $\overline{AE} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $\overline{DE} = \sqrt{a^2 + \overline{AE}^2}$ und daraus $F_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DE}$ erhalten.
Falls ein Lösungswegs mit Differentialrechnung gewählt wird, ist zu beachten, daß nicht nur solche Bedingungen herangezogen werden, die für ein inneres lokales Minimum notwendig sind (z. B. das Verschwinden der partiellen Ableitungen des als Funktion von $\frac{b}{d}$ und $\frac{c}{d}$ aufgefaßten Wertes $\frac{R}{r}$), sondern daß auch durch weitere Schlüsse die globale Minimaleigenschaft nachgewiesen wird.

291233 A) Lösung: 7 Punkte

Vorbereitend wird folgender Hilfssatz bewiesen:
Wenn k,l,m ganze Zahlen sind und

$$k + l\sqrt{2} + m\sqrt{3} = 0 \qquad (1)$$

gilt, so ist $k = l = m = 0$.
Beweis: Aus (1) folgt $-k = l\sqrt{2} + m\sqrt{3}$. Durch Quardrieren erhält man

$$k^2 = 2 \cdot l^2 + 3 \cdot m^2 + 2 \cdot lm\sqrt{6}.$$

Wäre $lm \neq 0$, so wäre $\sqrt{6}$ die rationale Zahl $\sqrt{6} = \frac{k^2 - 2 \cdot l^2 - 3 \cdot m^2}{2 \cdot lm}$.
Also ist $l = 0$ oder $m = 0$. Wäre $l = 0$, $m \neq 0$, so wäre $\sqrt{3}$ nach (1) die rationale Zahl $\sqrt{3} = -\frac{k}{m}$; wäre $m = 0$, $l \neq 0$, so wäre $\sqrt{2} = -\frac{k}{l}$. Also ist $l = m = 0$ und daher nach (1) auch $k = 0$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Angenommen nun, zu einem Zeitpunkt $t > 0$ seien P_1, P_2, P_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

(I) Es gilt $P_1 = P_2 = P_3$.
Dann hat in der Zeit t der Punkt P_i eine ganze Anzahl n_i von Seiten des Dreiecks ABC und zusätzlich vom zuletzt erreichten Eckpunkt bis zum Standort P_i die Strecke einer Längenmaßzahl r durchlaufen; folglich gilt

$$n_i + r = \sqrt{i}\cdot t \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Subtrahiert man die Gleichung mit $i = 1$ von den anderen, so folgt

$$n_2 - n_1 = (\sqrt{2} - 1)\cdot t, \tag{3}$$

$$n_3 - n_1 = (\sqrt{3} - 1)\cdot t. \tag{4}$$

Multiplikation von (3) mit $\sqrt{3} - 1$, von (4) mit $1 - \sqrt{2}$ und anschließende Addition ergibt

$$n_3 - n_2 + (n_1 - n_3)\sqrt{2} + (n_2 - n_1)\sqrt{3} = 0.$$

Nach dem Hilfssatz folgt hieraus $n_2 - n_1 = 0$ und damit nach (3) der Widerspruch $t = 0$.

(II) P_1, P_2, P_3 sind drei verschiedene Punkte, mindestens einer von ihnen liegt in einer Ecke des Dreiecks ABC.
Da dann die Strahlen aus diesem Punkt zu den beiden anderen der Punkte P_1, P_2, P_3 einen Winkel von 60° einschließen, müssen die beiden anderen Punkte auf je einer der beiden Seiten liegen, die die genannte Ecke gemeinsam haben. Ihr Abstand von dieser Ecke habe die Längenmaßzahl r. Hiernach hat von den drei Punkten P_1, P_2, P_3 einer, etwa P_n, eine ganze Anzahl g von Seiten des Dreiecks ABC zurückgelegt, der andere eine ganze Anzahl von Seiten und eine Strecke der Längenmaßzahl r, der dritte eine ganze Anzahl von Seiten und eine Strecke der Längenmaßzahl $1-r$. Also ist die Summe der Maßzahlen aller drei zurückgelegten Wege eine ganze Zahl h. Da P_n den Weg g in der Zeit t zurückgelegt hat, ist

$$t = \frac{g}{\sqrt{n}}. \tag{5}$$

Die Summe der in der Zeit t zurückgelegten Wege ist das Produkt aus der Zeit und der Summe der Geschwindigkeiten; d. h., es folgt

$$h = t \cdot (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}),$$

also nach (5)

$$h\sqrt{n} = g \cdot (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

In jedem der Fälle n = 1, 2, 3 ergibt sich hieraus nach dem Hilfssatz g = 0 und damit aus (5) der Widerspruch t = 0.

(III) P_1, P_2, P_3 sind drei verschiedene Punkte, keiner von ihnen liegt in einer Ecke des Dreiecks ABC.

Lägen zwei der Punkte P_1, P_2, P_3 auf einer gemeinsamen Seite des Dreiecks ABC, so wäre ihr Abstand kleiner als die Seitenlänge von ABC, und der dritte Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks $P_1P_2P_3$ müßte im Innern des Dreiecks ABC liegen. Da dies nicht möglich ist, liegt auf jeder Seite des Dreiecks ABC genau einer der Punkte P_1, P_2, P_3. Bezeichnet jeweils A_i denjenigen der Eckpunkte A, B, C, den P_i als letzten Eckpunkt erreicht hatte (siehe Abb. L 291233 A), so folgt

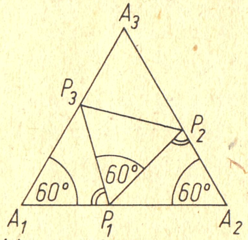

Abb. L 291233 A

$$\overline{\sphericalangle P_3A_1P_1} = \overline{\sphericalangle P_1A_2P_2} = 60^\circ,$$

$$\overline{P_3P_1} = \overline{P_1P_2},$$

$$\overline{\sphericalangle A_1P_1P_3} = 180^\circ - 60^\circ - \overline{\sphericalangle A_2P_1P_2}$$

$$= \overline{\sphericalangle A_2P_2P_1},$$

also $\triangle A_1P_1P_3 \cong \triangle A_2P_2P_1$ und daher $\overline{A_1P_1} = \overline{A_2P_2}$. Entsprechend folgt $\overline{A_2P_2} = \overline{A_3P_3}$.

Somit hat in der Zeit t der Punkt P_i eine ganze Anzahl n_i von Seiten des Dreiecks ABC und zusätzlich eine Strecke der Länge $\overline{A_1P_1} = \overline{A_2P_2} = \overline{A_3P_3}$ zurückgelegt (i = 1, 2, 3). Mit r als Maßzahl dieser Länge folgen wieder drei Gleichungen der Form (2), also der dort hergeleitete Widerspruch t = 0.

Damit ist die eingangs gemachte Annahme widerlegt; d. h., es ist bewiesen, daß es keinen Zeitpunkt t > 0 gibt, zu dem P_1, P_2, P_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks wären.

291233 B) Lösung: 7 Punkte

a) Für jedes n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen, das

$$x_i \geqq \frac{1}{n^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

und

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \tag{2}$$

erfüllt, gilt wegen $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel sowie wegen (2)

$$s \geqq n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}$$

$$\geqq \frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = n^2.$$

(Auch durch - einmalige - Anwendung der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel erhält man $s \geqq n^2$.)

Das n-Tupel $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ erfüllt offenbar (1) und (2) und führt auf den Wert $s = n^2$. Also nimmt s einen kleinsten Wert an, und zwar den Wert n^2.

(Bemerkung: Dies gilt sogar ohne die Einschränkung (1); ausreichend ist, $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und (2) vorauszusetzen.)

b) Für jedes n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, das (1) und (2) erfüllt, sei o.B.d.A.

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \tag{3}$$

angenommen. Nach (1) und (3) gilt für die Zahlen

$$t_i = x_i - \frac{1}{n^2} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

dann

$$t_1 \geqq t_2 \geqq \ldots \geqq t_n \geqq 0;$$

dabei ist $t_1 > 0$, da sonst $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n^2}$, $x_1 + \ldots + x_n = \frac{1}{n}$, also wegen $n \geqq 2$ ein Widerspruch zu (2) folgte.

Somit gibt es (genau) eine natürliche Zahl k mit $1 \leqq k \leqq n-1$ und

$$t_k > 0, \quad t_{k+1} = \ldots = t_n = 0. \tag{4}$$

Ist sogar $k \geqq 2$, so setze man

$$x'_1 = x_1 + t_k, \quad x'_k = x_k - t_k \; \left(= \frac{1}{n^2}\right),$$

$$x'_i = x_i \quad \text{für alle } i \text{ mit } i \neq 1, \; i \neq k,$$

$$s' = \frac{1}{x'_1} + \ldots + \frac{1}{x'_n}.$$

Damit ergibt sich, daß $x_1',\ldots,x_n'$ auch die zu (1),(2),(3),(4) entsprechenden Bedingungen erfüllen, jedoch mit einer kleineren Zahl anstelle von k. Für den neuen Wert s' gilt

$$s'-s = \frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_k'} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_k} = \frac{x_k - t_k + x_1 + t_k}{x_1'x_k'} - \frac{x_k + x_1}{x_1 x_k}$$

$$= \frac{x_1 + x_k}{x_1 x_k x_1' x_k'} \cdot (x_1 x_k - x_1' x_k') = \frac{x_1 + x_k}{x_1 x_k x_1' x_k'} \cdot (x_1 x_k - (x_1 + t_k)(x_k - t_k))$$

$$= \frac{x_1 + x_k}{x_1 x_k x_1' x_k'} \cdot ((x_1 - x_k)\, t_k + t_k^2) > 0, \quad \text{also} \quad s' > s.$$

Da dieser Schluß (ausgehend von $x_1',\ldots,x_n'$ statt von $x_1,\ldots,x_n$) so oft wiederholt werden kann, bis k = 1 eintritt, folgt insgesamt:

Der Term s nimmt einen größten Wert an, und zwar ist dies der für k = 1, d. h. $x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n^2}$ und folglich $x_1 = 1 - (n-1) \cdot \frac{1}{n^2}$ entstehende Wert

$$s = \frac{n^2}{n^2 - n + 1} + (n-1) \cdot n^2 \quad \left(= \frac{n^3(n^2 - 2n + 2)}{n^2 - n + 1}\right).$$

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

291234) Lösung: 7 Punkte

Für jedes $a > 0$ gelten die folgenden Aussagen:

(1) Für alle $n = 1,2,\ldots$ gilt $x_n > 0$.

Beweis durch vollständige Induktion: I. Es gilt $x_1=\sqrt{a} > 0$.

II. Aus $x_n > 0$ folgt $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} > \sqrt{a} > 0$.

(2) Für alle $n = 1,2,\ldots$ gilt $x_{n+1} > x_n$.

Beweis: I. Nach (1) ist $x_1 > 0$, also $x_2 = \sqrt{a + x_1} > \sqrt{a} = x_1$.

II. Aus $x_{n+1} > x_n$ folgt $x_{n+2} = \sqrt{a + x_{n+1}} > \sqrt{a+x_n} = x_{n+1}$.

(3) Die Gleichung $g = \sqrt{a + g}$ hat genau eine Lösung, nämlich

$g = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

Beweis: Die Gleichung ist äquivalent mit der Bedingung, daß

$$g > 0 \quad \text{und} \quad g^2 = a + g$$

gilt. Die Gleichung $g^2 - g - a = 0$ hat aber genau die positive Lösung $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4} + a}$ und die negative Lösung $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

(4) Für alle $n = 1,2,\ldots$ gilt $x_n < g$.

Beweis: I. Es gilt $x_1 = \sqrt{a} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a} = g$.

II. Aus $x_n < g$ folgt, da g nach (3) die Gleichung $g=g^2 - a$ erfüllt,

$$x_n < g^2 - a,$$
$$x_n + a < g^2.$$

Da $g > 0$ sowie nach (1) auch $x_n + a > a > 0$ ist, folgt weiter

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + a} < g.$$

Aus (2) und (4), d. h., weil die Folge (x_n) monoton steigend und nach oben beschränkt ist, folgt: (x_n) ist konvergent.

Da $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ für alle n gilt, folgt: Der Grenzwert g erfüllt die Gleichung $g = \sqrt{a + g}$. Nach (3) besagt dies: Der Grenzwert ist $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

(Bemerkung: Man kann statt $g = \sqrt{a + g}$ auch die Gleichung $g^2 - g - a = 0$ heranziehen und zusätzlich aus (1) schließen, daß der Grenzwert nicht negativ ist.) Die Folge (x_n) ist somit für alle $a > 0$ konvergent und hat jeweils für a den Grenzwert $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

291235) Lösung: 7 Punkte

Für je fünf Punkte der vorausgesetzten Lage gilt: Man kann unter allen Dreiecken, deren Eckpunkte drei der fünf Punkte sind, eines mit möglichst großem Flächeninhalt auswählen. Dann muß nach Voraussetzung einer der folgenden Fälle vorliegen:

1. Fall: Die beiden anderen der fünf Punkte liegen im Innern des ausgewählten Dreiecks.

Ihre Verbindungsgerade geht nach Voraussetzung durch keine Ecke des Dreiecks, sie muß daher zwei verschiedene Seiten des Dreiecks in je einem inneren Punkt schneiden. Das Dreieck sei etwa ABC, die Punkte im Innern D,E; die Gerade g durch D,E schneide etwa AB in P und AC in Q; dabei seien die Punkte P,D,E,Q auf g in dieser Reihenfolge angeordnet (siehe Abb. L 291235 a). Dann ist[1] die Vierecksfläche BDEC konvex.

2. Fall: Mindestens ein anderer der fünf Punkte liegt außerhalb des ausgewählten Dreiecks.

Das Dreieck sei ABC, der außerhalb liegende Punkt sei D. Die Geraden, die die Dreiecksseiten enthalten, zerlegen die Ebene in die Dreiecksfläche und in weitere Flächen, die entweder von zwei Strahlen oder von einer Dreiecksseite und zwei Strahlen begrenzt werden. Nach Voraussetzung kann D auf keiner Randlinie eines dieser Gebiete liegen. Läge D im Innern eines von zwei Strahlen, etwa von den Verlängerungen der Seiten AC und BC über C hinaus, begrenzten Gebietes (Abb. L 291235 b), so ergäbe[1] der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, vermehrt um die Flächeninhalte der Dreiecke ACD und BCD, den Flächeninhalt von ABD. Das widerspricht der Auswahl der drei Punkte A,B,C.

Also muß D im Innern eines von einer Dreiecksseite und zwei Strahlen begrenzten Gebietes liegen, etwa in dem Gebiet, das von der

---

1 Ein weiter ausgeführter, etwa auf Lagebeziehungen für Geraden und von ihnen begrenzte Halbebenen zurückgehender Beweis wird nicht vom Schüler verlangt.

Seite BC und den Verlängerungen der Seiten AB bzw. AC über B bzw. C hinaus, begrenzt wird (Abb. L 291235 c). Dann ist[1] die Vierecksfläche ABDC konvex.

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

<u>Hinweis:</u> Vom Schüler können auch Sätze der folgenden Art als bekannter Sachverhalt herangezogen werden:

Ein Polygon ist genau dann konvex, wenn es einfach ist (d. h. eine Randlinie ohne Selbstüberschneidungen hat) und keine Innenwinkel größer als 180° hat.

Zu jeder Punktmenge M gibt es die konvexe Hülle H. Sie ist diejenige Menge, die M enthält, konvex ist und in jeder M enthaltenden konvexen Menge enthalten ist.

Liegt M in einer Ebene, so ist H der Durchschnitt aller M enthaltenden Halbebenen.

Ist M außerdem endlich und nicht kollinear, so ist H ein Polygon, dessen Eckpunkte zu M gehören.

Möglich ist auch die Anwendung von Sätzen über Existenz und Lage von Stützgeraden ebener konvexer Mengen, auch in anschauungsbezogener Formulierung und Fundierung.

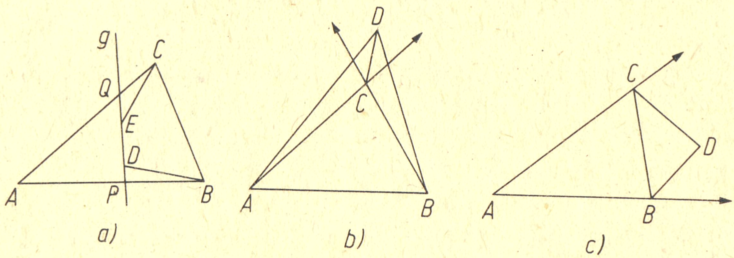

Abb. L 291235

291236) Lösung: **6 Punkte**

Sind $a_{888}, \dots, a_0$ in dieser Reihenfolge die aufgeschriebenen Zahlen, so stellt die erhaltene Ziffernfolge die Zahl

$$z = \sum_{i=0}^{888} a_i \cdot 10^{3i} = \sum_{i=0}^{888} (a_i + a_i(10^{3i} - 1))$$

$$= \sum_{i=0}^{888} a_i + \sum_{i=1}^{888} a_i(10^{3i} - 1) = \sum_{n=111}^{999} n + \sum_{i=1}^{888} a_i(10^{3i} - 1)$$

dar.

Die Zahl $\sum_{n=111}^{999} n = \frac{111 + 999}{2} \cdot 889$ ist durch 37 teilbar, da 111 und folglich auch 999 durch 37 teilbar sind und 37 zu 2 teilerfremd ist (oder: wie aus $111 + 999 = (3 + 3 \cdot 9) \cdot 37 = 30 \cdot 37$ folgt).

Jede der Zahlen $10^{3i} - 1$ ist durch 37 teilbar, da sie mit der durch 3 teilbaren Anzahl $3i$ von Ziffern 9 geschrieben wird, so daß das Divisionsverfahren wegen der Teilbarkeit von 999 durch 37 auf den Rest 0 führt.

(Man kann auch mit der Formel $\sum_{k=0}^{i-1} 1000^k = \frac{1000^i - 1}{1000 - 1}$ die Teilbarkeit von $10^{3i} - 1$ durch 999 begründen.)

Damit ist die Teilbarkeit von z durch 37 bewiesen.