XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

291221

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + xy + xy^2 = -21, \qquad (1)$$

$$y + xy + x^2y = 14, \qquad (2)$$

$$x + y = -1. \qquad (3)$$

291222

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen m, die die Bedingung erfüllen, daß für jede reelle Zahl x die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x^2 + (m+2)x + 8m + 1 > 0. \qquad (1)$$

291223

Über fünf Streckenlängen a, b, c, d, e werde vorausgesetzt, daß je drei von ihnen die Seitenlängen eines Dreiecks sind. Man beweise, daß unter dieser Voraussetzung stets eines dieser Dreiecke spitzwinklig sein muß.

291224

Man löse die folgende Aufgabe

a) für $n = 8$ und $k = 5$,

b) für $n = 9$ und $k = 6$.

Aufgabe: Untersuchen Sie, ob bei jeder Eintragung der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n^2$ in ein schachbrettartiges $n \times n$-Felder-Quadrat zwei zueinander benachbarte Felder vorkommen müssen, in denen Zahlen stehen, deren Differenz größer oder gleich k ist!

Hinweise:

1. Die genannten Eintragungen sollen die Bedingungen erfüllen, daß jedes Feld genau eine Zahl erhält und daß jede Zahl genau einmal verwendet wird.

2. Zwei Felder sollen genau dann zueinander benachbart heißen, wenn sie eine Seitenstrecke miteinander gemeinsam haben.

L 11/12

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

291221) Lösung: 8 Punkte

I. Wenn reelle Zahlen x, y die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllen, so folgt aus (1), (2) durch Addition

$$x+y + 2xy + (x+y)xy = -7.$$

Setzt man hierin (3) ein, so ergibt sich

$$-1 + 2xy - xy = -7,$$

$$xy = -6.$$

Damit folgt aus (1)

$$x - 6 - 6y = -21.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von (3), so erhält man

$$6 + 7y = 20,$$

$$y = 2.$$

Hieraus und aus (3) folgt

$$x = -3.$$

II. Diese Zahlen erfüllen

$$x + xy + xy^2 = -3 - 6 - 12 = -21,$$

$$y + xy + x^2y = 2 - 6 + 18 = 14,$$

$$x + y = -3 + 2 = -1,$$

also das geforderte Gleichungssystem.

Mit I., II. ist bewiesen, daß das Gleichungssystem genau von dem Paar $(x;y) = (-3;2)$ erfüllt wird.

Hinweise:

1. Es gibt zahlreiche andere Lösungsmöglichkeiten, hauptsächlich auch deshalb, weil das Gleichungssystem überbestimmt ist, d. h. weil schon zwei der Gleichungen das Paar (x;y) eindeutig festlegen. Ein Beispiel eines anderen Lösungsbeginns:

Setzt man $y = -x - 1$ aus (3) in (1) ein, so folgt

$x^3 + x^2 + x + 21 = 0$, $(x + 3)(x^2 - 2x + 7) = 0$ und daraus

$x = -3$ (wegen $x^2 - 2x + 7 = (x-1)^2 + 6 > 0$ für alle reellen x).

2. Infolge der Überbestimmtheit ist für viele Lösungswege der darin zuerst ausgeführte Schluß von (1), (2), (3) auf $(x;y) = (-3;2)$ nicht einfach dadurch umzukehren, daß man einzelne Teilschritte dieses Schlusses einzeln umkehrt (oder sie sogleich - falls das zutrifft - als Äquivalenzen angibt). Vielmehr müssen solche Lösungswege den umgekehrten Schluß von $(x;y) = (-3;2)$ auf (1), (2), (3) (die "Probe") geeondert ausführen, z. B. wie oben durch Einsetzen in die linken Seiten.

291222) Lösung: 10 Punkte

Die Diskriminante der quadratischen Gleichung

$$x^2 + (m+2)x + 8m+1 = 0 \qquad (2)$$

lautet

$$D = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 - (8m+1) = \frac{1}{4}(m^2 + 4m + 4 - 32m - 4) = \frac{1}{4}\,m(m - 28).$$

Daher gilt:

I. Für $m \leqq 0$ ist $m - 28 < 0$, also $D \geqq 0$. Daher gibt es zu jedem solchen m (mindestens) eine reelle Lösung der Gleichung (2); also ist nicht für jede reelle Zahl x die Ungleichung (1) erfüllt.

II. Für $m \geqq 28$ ist $m > 0$ und $m - 28 \geqq 0$, also $D \geqq 0$. Daher folgt ebenso, daß (1) nicht für jede reelle Zahl x gilt.

III. Für $0 < m < 28$ ist $m > 0$ und $m - 28 < 0$, also $D < 0$. Für jede reelle Zahl x gilt daher

$$\begin{aligned} x^2 + (m+2)x + 8m+1 &= \left(x + \frac{m+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 + 8m+1 \\ &= \left(x + \frac{m+2}{2}\right)^2 - D \\ &\geqq -D > 0. \end{aligned}$$

Mit I., II., III. ist bewiesen, daß die in der Aufgabenstellung genannte Bedingung genau von allen denjenigen reellen Zahlen m erfüllt wird, für die $0 < m < 28$ gilt.

Bemerkung: Zum Beweis kann auch auf bekannte Sachverhalte bei der Parabel $y = x^2 + (m+2)x + 8m+1$ zurückgegriffen werden, beispielsweise auch unter Verwendung grafischer Veranschaulichung. Ähnliches gilt für Möglichkeiten der Diskussion von $m^2 - 28 \gtreqless 0$.

291223) Lösung: 10 Punkte

Für $a,\ldots,e$ sei o.B.d.A. noch $a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e$ vorausgesetzt.

Für jedes nicht spitzwinklige Dreieck mit Seitenlängen p, q, r und dem rechten oder stumpfen Winkel gegenüber der Seite der Länge r (also $r > p$ und $r > q$) gilt nach dem Kosinussatz $r^2 \geqq p^2 + q^2$.

Wären alle in der Aufgabe genannten Dreiecke rechtwinklig oder stumpfwinklig, so folgte daher

$$e^2 \geqq c^2 + d^2, \tag{1}$$

$$d^2 \geqq b^2 + c^2, \tag{2}$$

$$c^2 \geqq a^2 + b^2. \tag{3}$$

Aus (2) ergäbe sich wegen $b^2 + c^2 - 2bc = (b-c)^2 \geqq 0$ und $b \geqq a$, $c \geqq b$

$$d^2 \geqq 2bc \geqq 2ab; \tag{4}$$

aus (1), (3), (4) folgte

$$e^2 \geqq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2,$$

$$e \geqq a+b.$$

Daher wäre die Dreiecksungleichung für a, b, e nicht erfüllt, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wegen dieses Widerspruchs war die Annahme falsch, daß alle in der Aufgabe genannten Dreiecke rechtwinklig oder stumpfwinklig sein könnten. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

291224) Lösung: 12 Punkte

Eine Folge von Feldern werde genau dann eine Kette genannt, wenn je zwei darin aufeinanderfolgende Felder zueinander benachbart sind.

a) Für jede der genannten Eintragungen gilt: Die beiden Felder, in denen die Zahlen 1 bzw. 64 stehen, können durch eine Kette verbunden werden, die aus nicht mehr als 15 Feldern besteht, z. B. durch eine Kette, die vom Anfangsfeld aus erst höchstens 7 Schritte waagerecht und dann höchstens 7 Schritte senkrecht verläuft. Die Zahlen in den Feldern einer solchen Kette seien $a_1=1, a_2, \ldots, a_m=64$ ($m \leqq 15$). Damit gilt

$$64-1 = (a_m-a_{m-1}) + (a_{m-1}-a_{m-2}) + \ldots + (a_3-a_2) + (a_2-a_1).$$

Wegen $m \leqq 15$ muß eine der hier auftretenden m-1 Differenzen a_i-a_{i-1} größer als 4 sein; denn andernfalls wäre ihre Summe $\leqq 14 \cdot 4 < 63$.

Damit ist bewiesen, daß die zur Untersuchung gestellte Frage zu bejahen ist.

b) Analog betrachte man für diese Aufgabe die Felder mit den Zahlen 1 und 81.

I. Wenn diese beiden Felder nicht zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder des gesamten 9x9-Quadrates sind, so können sie durch eine Kette verbunden werden, die aus nicht mehr als 16 Feldern besteht, und wegen $15 \cdot 5 < 80$ ergibt sich wie in a) die Existenz zweier benachbarter Felder, in denen Zahlen mit einer Differenz größer als 5 stehen.

II. Stehen die Zahlen 1 und 81 aber in zwei diagonal gegenüberliegenden Eckfeldern, so gibt es zwei Ketten aus je genau 17 Feldern, die diese Felder miteinander verbinden und in denen auf das Feld mit der Zahl 1 nicht dasselbe Feld folgt, sondern in der einen Kette das waagerechte und in der anderen Kette das senkrechte Nachbarfeld. Die Zahlen in diesen Ketten seien $a_1=1$, $a_2, \dots, a_{17}=81$ bzw. $b_1=1$, $b_2, \dots, b_{17}=81$. Wären in den beiden Darstellungen

$$81-1 = (a_{17}-a_{16}) + (a_{16}-a_{15}) + \dots + (a_3-a_2) + (a_2-a_1)$$
$$= (b_{17}-b_{16}) + (b_{16}-b_{15}) + \dots + (b_3-b_2) + (b_2-b_1)$$

alle $a_i - a_{i-1} \leqq 5$ $(i = 2,\dots,17)$ (1)

und alle $b_i - b_{i-1} \leqq 5$ $(i = 2,\dots,17)$, (2)

so ergäbe sich

$$a_2 - a_1 = 5;$$

denn wegen (1) würde $a_2 - a_1 < 5$ auf $(a_{17}-a_{16}) + \dots + (a_2-a_1) < 80$ führen.

Ebenso ergäbe sich aus (2) aber auch

$$b_2 - b_1 = 5$$

und damit

$$a_2 = 5 + a_1 = 6 = 5 + b_1 = b_2$$

im Widerspruch zu der Bedingung, daß in die zwei nach Wahl der Ketten voneinander verschiedenen mit a_2 bzw. b_2 belegten Felder voneinander verschiedene Zahlen einzutragen waren.

Wegen dieses Widerspruchs ist auch im Fall II. die Existenz zweier benachbarter Felder, in denen Zahlen mit einer Differenz größer als 5 stehen, bewiesen.

Mit I., II. ist gezeigt, daß auch die für b) gestellte Frage zu bejahen ist.

Bemerkung: Diese Aussagen lassen sich noch verschärfen, beispielsweise durch Vergrößerung von k. So gibt es in jeder Belegung des 8x8-Feldes zwei benachbarte Felder mit einer Differenz $\geqq 6$. (Zur Widerlegung der Annahme, es träten nur Differenzen $\leqq 5$ auf, folgert man z. B., daß dann diagonal benachbarte Felder stets Differenzen $\leqq 9$ haben müßten, und wendet diese Folgerung wiederholt an.)

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

291221

Ermittlung von x, y	5
Probe (oder andere Vervollständigung des Nachweises)	3
	8

291222

Nachweis der geforderten Bedingung für alle m mit $0 < m < 28$.	5
Nachweis, daß sie für jedes andere m nicht erfüllt ist (Diskussion der übrigen Fälle oder anderer Unmöglichkeitsbeweise)	5
	10

291223

Schluß aus Recht- oder Stumpfwinkligkeit eines Dreiecks (z. B. $r^2 \geqq p^2 + q^2$)	3
Anwendung geeigneter Ungleichungssätze (z. B. $b^2 + c^2 \geqq 2bc$)	3
Logisch vollständige Beweisdurchführung	4
	10

291224

a) Beweismotiv (z. B. Betrachtung geeigneter Mengen von Nachbarfeldern)	2
Durchführung des Schlusses auf Existenz einer Differenz größer als 4	4
b) Beweisteile entsprechend zu a)	3
Zusätzlich erforderliche Beweisführung (z. B. Betrachtung zweier Ketten im Fall diagonaler Ecken mit 1, 81)	3
	12