XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen.

291041

Gegeben seien drei Geraden g, h, j in einer Ebene; keine zwei dieser Geraden seien zueinander parallel; kein Punkt der Ebene liege auf allen drei Geraden. Gegeben sei ferner eine Länge a. Gesucht ist für jede solche Vorgabe von g, h, j, a die Anzahl aller derjenigen Kreise c, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) Der Kreis c schneidet jede der Geraden g, h, j in zwei Punkten G_1, G_2 bzw. H_1, H_2 bzw. J_1, J_2.

(2) Es gilt $\overline{G_1G_2} = \overline{H_1H_2} = \overline{J_1J_2} = a$.

291042

Von zwei reellen Zahlen werde gefordert: Die Summe aus den Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1. Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

Von den nachstehenden Aufgaben 291043 A und 291043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

291043 A

Man beweise die folgende Aussage:
Die Folge $(2^n - 1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ enthält für jede beliebige Zahl z einen Abschnitt, dessen Länge größer als z ist und in dem keine Primzahl vorkommt.

Hinweis: Ist (a_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge und sind $k \geqq 1$ und m natürliche Zahlen, so heißt das k-Tupel $(a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{m+k})$ ein Abschnitt der Folge (a_n) und k seine Länge.

291043 B

Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D, E. Sie seien so im Raum gelegen, daß keine vier dieser fünf Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen und daß keine zwei Verbindungsstrecken von je zwei verschiedenen dieser fünf Punkte einander gleichlang sind.
Ermitteln Sie für jede Lagemöglichkeit derartiger Punkte die Anzahl aller verschiedenen Polyeder, die genau die fünf Ecken A, B, C, D, E haben!
Dabei seien zwei Polyeder genau dann als voneinander verschieden bezeichnet, wenn es keine Drehung und keine Spiegelung gibt, die das eine Polyeder in das andere überführt.

Hinweis: Ein Polyeder ist ein Körper endlicher Größe, dessen Oberfläche aus ebenen Vielecken besteht.

A 10; II

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

291044

In jedes leere Kästchen der Abbildung A 291044 soll eine natürliche Zahl so eingetragen werden, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte eine (fünfgliedrige) arithmetische Folge steht.
Ermitteln Sie alle Eintragungen, die diese Forderung erfüllen!

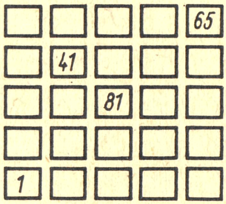

Abb. A 291044

291045

Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

291046

Die Abbildung A 291046 stellt in senkrechter Eintafelprojektion ein Polyeder dar, das genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat. Die Bildpunkte A', B', C', D' sind die Eckpunkte eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a, der Bildpunkt E' ist der Mittelpunkt dieses Quadrates.

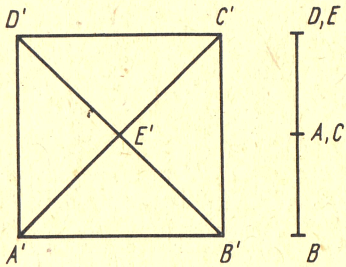

Abb. A 291046

A 10; II

Im beigefügten Höhenmaßstab ist a die Höhe von D und E über der von B, und $\frac{a}{2}$ ist die Höhe von A und C über der von B. Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz genau ein Polyeder gibt, auf das diese Beschreibung zutrifft! Ermitteln Sie das Volumen dieses Polyeders!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

291041) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn ein Kreis c die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt: Ist M der Mittelpunkt und r der Radius von c, so hat M von jeder der Geraden g, h, j den Abstand

$$s = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\,. \qquad (3)$$

Dies ergibt sich aus dem Satz, daß jeweils das Lot von M auf eine Sehne diese halbiert, und aus dem Satz des Pythagoras.
Nach Voraussetzung bilden g, h, j die Seiten (und deren Verlängerungen) eines Dreiecks D. Also ist M einer der vier Punkte, die von den (einschließlich ihrer Verlängerungen verstandenen) Seiten von D jeweils drei gleichgroße Abstände haben; d. h., M ist der Inkreismittelpunkt oder einer der drei Ankreismittelpunkte von D, und die in (3) genannte Länge s ist der Inkreisradius bzw. der Radius des betreffenden Ankreises. Aus (3) folgt ferner, daß c den Radius

$$r = \sqrt{s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

hat.

II. Umgekehrt folgt: Wenn M der Mittelpunkt und s der Radius des Inkreises oder eines Ankreises von D ist und wenn hiermit r die nach (4) gebildete Länge ist, dann schneidet der um M mit r konstruierte Kreis c jede der drei Geraden g, h, j in einer Sehne, deren halbe Länge $\sqrt{r^2 - s^2} = \frac{a}{2}$ beträgt; d. h., dann erfüllt c die Bedingungen (1), (2).
Damit ist bewiesen: Für jede der in der Aufgabe genannten Vorgaben von g, h, j, a gibt es genau vier Kreise c, die (1) und (2) erfüllen.

291042) Lösung: 7 Punkte

Eine Zahl s ist genau dann einer der gesuchten Werte, wenn es zwei reelle Zahlen x, y gibt, für die

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1 \qquad (1)$$

und

$$x + y = s \qquad (2)$$

gilt.

I. Wenn für eine Zahl s die Gleichungen (1) und (2) von reellen Zahlen x, y erfüllt werden, so folgt

$$x \neq 0 \qquad (3)$$

und

$$y = s - x \neq 0, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} + \frac{1}{x(s-x)} = 1, \qquad (5)$$

$$s-x + x + 1 = x(s-x),$$

$$x^2 - sx + s + 1 = 0. \qquad (6)$$

Aus (3) und (4) folgt $x \cdot (x-s) \neq 0$; damit folgt aus (6) $s \neq -1$; ferner ergibt sich aus (6), also aus

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4} - s - 1 \qquad (8)$$

der Reihe nach

$$s^2 - 4s - 4 \geqq 0, \qquad (9)$$

$$(s - 2)^2 \geqq 8, \qquad (10)$$

$$|s - 2| \geqq 2\sqrt{2}. \qquad (11)$$

Hieraus folgt: Es gilt

entweder $s - 2 \leqq -2\sqrt{2}$ oder $s - 2 \geqq 2\sqrt{2}$;

also gilt

entweder $s \leqq 2 - 2\sqrt{2}$ oder $s \geqq 2 + 2\sqrt{2}$. (12)

Daher können nur Zahlen s, die (7) und (12) erfüllen, den Bedingungen der Aufgabe genügen.

II. Wenn s eine Zahl ist, die (7) und (12) erfüllt, so folgt umgekehrt (11), wegen $2\sqrt{2} > 0$ weiter (10), also (9). Demnach existiert (mindestens) eine Lösung x der Gleichung (8), d. h. (6).

Wegen (7) erfüllt jede Lösung x von (6) auch $x^2 - sx \neq 0$, also $x \neq 0$ und $x - s \neq 0$; daher folgt weiter (5). Somit wird (1) von x und der nach (4) gebildeten Zahl y erfüllt, für die auch (2) gilt.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Werte sind genau diejenigen Zahlen s, die (7) und (12) erfüllen.

Wegen $-1 < 2 - 2\ 2$ (was aus $8 < 9$, also $2\sqrt{2} < 3$ folgt) kann man diese Zahlen auch als diejenigen kennzeichnen, die einem der Intervalle

$$s < -1,\quad -1 < s \leqq 2 - 2\sqrt{2},\quad s \geqq 2 + 2\sqrt{2}$$

angehören.

<u>291043 A) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Es gilt die Hilfsaussage:

Für jede natürliche Zahl $n > 1$, die nicht Primzahl ist, ist auch $2^n - 1$ nicht Primzahl.

Ist nämlich $n = pq$ mit natürlichen Zahlen $p,q > 1$, so gilt, wenn man zur Abkürzung $x = 2^p$ setzt:

Die Zahl

$$2^n - 1 = x^q - 1 = (x - 1)\cdot(x^{q-1} + \ldots + x + 1)$$

ist zerlegt in die Faktoren

$$x - 1 > 2 - 1 = 1,$$

$$x^{q-1} + \ldots + x + 1 \geqq x + 1 > 1.$$

Für jede natürliche Zahl $N > 1$ gilt nun beispielsweise: Keine der N-1 Zahlen

$$n = N! + 2,\quad N! + 3,\ \ldots\ ,\quad N! + N \qquad (1)$$

ist eine Primzahl; denn diese Zahlen sind jeweils teilbar durch

$$2,\ 3,\ \ldots\ ,\ N$$

und größer als diese genannten Teiler.

Für jede Zahl z gilt daher: Wählt man eine natürliche Zahl $N > 1$ mit $N > z+1$, so hat der mit den Zahlen n aus (1) gebildete Abschnitt der Folgenglieder $2^n - 1$ die Länge $N-1 > z$, und in diesem Abschnitt kommt aufgrund der Hilfsaussage keine Primzahl vor, w.z.b.w.

Bemerkung:

Die Teilbarkeit von $x^q - 1$ durch $x - 1$ kann auch als bekannter Sachverhalt zitiert werden, ebenso die Eigenschaft aller Zahlen (1), nicht Primzahl zu sein.

291043 B) Lösung: 7 Punkte

I. Nach der Voraussetzung über die Verbindungsstrecken sind je zwei der gesuchten Polyeder genau dann im Sinne der Aufgabenstellung voneinander verschieden, wenn es eine Verbindungsstrecke von zwei verschiedenen der fünf Punkte gibt, die in dem einen der beiden Polyeder als Kante vorkommt, in dem anderen aber nicht.

II. Wir diskutieren zunächst Lagemöglichkeiten der fünf Punkte. Aus der Voraussetzung, daß keine vier der fünf Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen, folgt:
Unter den Ebenen durch je drei der fünf Punkte gibt es eine, bezüglich der die beiden anderen Punkte auf derselben Seite liegen. Sind etwa A und B in dieser Ebene, so liegen bezüglich einer der drei durch A, B und einen der Punkte C, D, E gelegten Ebenen, o. B.d.A. etwa bezüglich der Ebene durch A, B, C, die beiden anderen Punkte D, E auf verschiedenen Seiten. Die Strecke DE schneidet dann die Ebene durch A, B, C in einem Punkt S, und es liegt einer der folgenden Fälle vor:
(1) S liegt im Innern des Dreiecks ABC (Abb. L 291043 B a).
(2) S liegt außerhalb des Dreiecks ABC.
Im Fall (2) hat für eine der Ecken A, B, C, o.B.d.A. etwa für A, die durch S und diese Ecke A gelegte Gerade einen Schnittpunkt T mit der Gegenseite BC der Ecke A. Für diesen Punkt T kann erstens gelten, daß A zwischen S und T liegt (Abb. L 291043 B b). Da nicht Fall (1) vorliegt, kann nicht S zwischen A und T liegen. Die nur noch verbleibende Möglichkeit, daß T zwischen A und S liegt (Abb. L 291043 B c), geht durch Umbenennung in Fall (1) über; denn bei dieser Möglichkeit liegen B und C auf verschiedenen Seiten bezüglich der Ebene durch A, D, E, und die Strecke BC schneidet diese Ebene in dem Punkt T, der im Innern des Dreiecks ADE liegt.

III. Im Fall der Abbildung L 291043 B a entsteht durch Zusammensetzen der beiden Tetraeder ABCD und ABCE eines der gesuchten Polyeder; es ist zugleich das größte Polyeder, dessen sämtliche Ecken sich unter den fünf Punkten A, B, C, D, E befinden (die konvexe Hülle von A, B, C, D, E). Alle weiteren gesuchten Polyeder müssen daher aus diesem Polyeder durch Entfernen eines Teilpolyeders entstehen. Die einzigen Möglichkeiten hierzu bestehen darin, eines der Tetraeder ABDE, BCDE, CADE zu entfernen (denn DE ist die einzige Verbindungsstrecke von zweien der Punkte A, B, C, D, E, die durch das Innere der konvexen Hülle geht; daher muß DE in jedem zu entfernenden Teilpolyeder als Kante auftreten). Somit gibt es im vorliegenden Fall genau vier Polyeder der gesuchten Art; sie sind nach I. auch im Sinne der Aufgabenstellung paarweise verschieden.

Im Fall der Abbildung L 291043 B b müssen ebenso alle gesuchten Polyeder aus dem Tetraeder BCDE durch Entfernen eines Teilpolyeders entstehen. Die einzigen Möglichkeiten hierzu bestehen im Entfernen eines der Tetraeder ABCD, ABCE, ABDE, ACDE (denn unter allen Verbindungsstrecken von zweien der Punkte A, B, C, D, E gehen nur diejenigen in das Innere von BCDE, die A als einen ihrer Endpunkte haben; daher muß A in jedem zu entfernenden Teilpolyeder als Ecke auftreten). Somit gibt es auch in diesem Fall genau vier Polyeder der gesuchten Art; auch sie sind nach I. im Sinne der Aufgabenstellung paarweise verschieden.

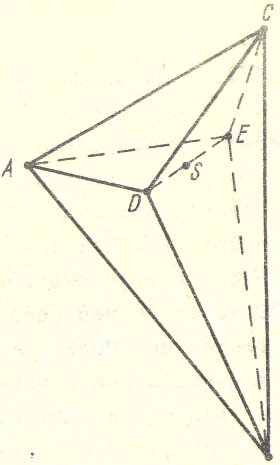

Abb. L 291043Ba

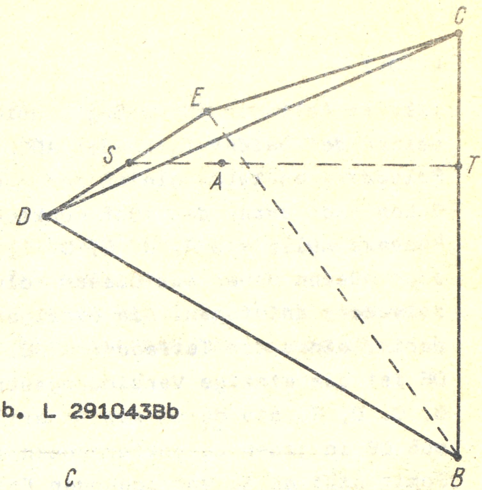

Abb. L 291043Bb

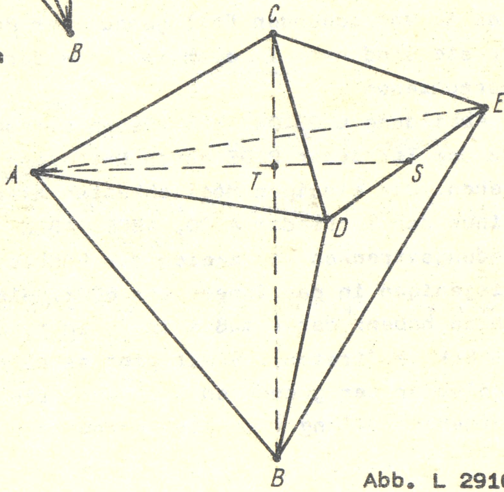

Abb. L 291043Bc

Bemerkungen:

Statt Ausführungen nach Art der hier in Klammern gesetzten Textteile kann auch ein stärkeres Heranziehen anschaulicher Skizzen akzeptiert werden. Aus der Darstellung soll jedoch auch dann die Vollständigkeit berücksichtigter Fälle hervorgehen.
Für manche Beweismöglichkeiten kann es nützlich sein, Anzahlaussagen heranzuziehen, nachdem man sie z. B. folgendermaßen hergeleitet hat: Sind k, f die Anzahlen der Kanten bzw. Flächen eines gesuchten Polyeders und sind a, b die Anzahlen derjenigen Ecken, von denen 3 bzw. 4 Kanten ausgehen, so gelten die Gleichungen $5-k+f=2$ (Eulerscher Polyedersatz), $2k=3f$ (jede Kante gehört zu genau 2 Flächen, jede Fläche zu genau 3 Kanten, da nach Voraussetzung keine n-Ecksflächen mit $n > 3$ vorkommen), $a+b=5$, $3a+4b=2k$. Aus diesen Gleichungen folgt $k = 9$, $f = 6$, $a = 2$, $b = 3$.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

291044) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn eine Eintragung die Forderung erfüllt, so folgt für die in Abbildung L 291044 a mit x, y, z, w bezeichneten Zahlen: Da in der 1. und 2. Zeile sowie in der 1. und 3. Spalte je eine arithmetische Folge steht, gilt

X		Y		65
Z	41	W		
		81		
1				

$$y - x = 65 - y, \quad (1)$$
$$41 - z = w - 41, \quad (2)$$
$$3 \cdot (z - x) = 1 - z, \quad (3)$$
$$w - y = 81 - w. \quad (4)$$

Abb. L 291044 a

Aus (1) bzw. (2) folgt
$$x = 2y - 65 \quad (5)$$
bzw.
$$z = 82 - w. \quad (6)$$

Setzt man dies in (3), d. h. $4z - 3x = 1$ ein, so folgt
$$328 - 4w - 6y + 195 = 1,$$
$$2w = 261 - 3y.$$

Hieraus und aus (4), d. h. $2w = 81 + y$, (7)
erhält man
$$261 - 3y = 81 + y,$$
$$y = 45. \quad (8)$$

Damit ergibt sich aus (7), (6), (5):
$$w = 63,\ z = 19,\ x = 25. \quad (9)$$

Aus diesen in (8), (9) genannten Werten ergeben sich durch Vervollständigung der arithmetischen Folgen die in Abbildung L 291044 b genannten Zahlen, z. B. erst die in der 1. und 2. Zeile und dann die in den Spalten fehlenden Werte.

25	35	45	55	65
19	41	63	85	107
13	47	81	115	149
7	53	99	145	191
1	59	117	175	233

Abb. L 291044 b

II. Man bestätigt, daß in Abbildung 291044 b in jeder Zeile und in jeder Spalte eine arithmetische Folge steht.
Damit ist gezeigt, daß genau diese Eintragung die Forderung der Aufgabe erfüllt.

291045) Lösung: 6 Punkte

a sei die Seitenlänge des Dreiecks. Dann können fünf Punkte wie in Abbildung L 291045 gelegt werden; der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte beträgt hierbei $\frac{a}{2}$.
Wir zeigen nun, daß bei keiner Lage von fünf Punkten im Dreieck der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte größer als $\frac{a}{2}$ sein kann. Gäbe es nämlich doch eine solche Lage, so wäre jeder dieser Abstände größer als $\frac{a}{2}$. Daher könnte dann in jedem der vier in Abbildung L 291045 gezeigten Teildreiecke höchstens ein Punkt liegen, also lägen insgesamt höchstens vier Punkte im ganzen Dreieck.

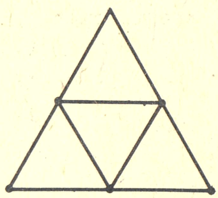

Abb. L 291045

Damit ist bewiesen, daß z. B. die Verteilung in Abbildung L 291045 die Forderung der Aufgabe erfüllt.

291046) Lösung: 7 Punkte

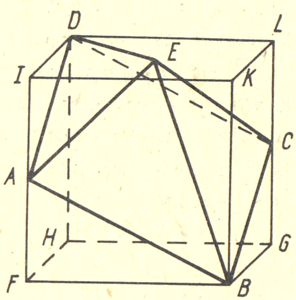

Abb. L 291046

Es seien F, G, H die Punkte, die dieselbe Höhe wie B und dieselben Bildpunkte wie A, C bzw. D haben. Ferner seien I, K, L die Punkte, die dieselbe Höhe wie D und E und dieselben Bildpunkte wie A, B bzw. C haben. Dann ist FBGHIKLD ein Würfel (siehe Abb. L 291046). Darin sind A und C die Mittelpunkte der Kanten FI bzw. GL, und E ist der Mittelpunkt des Quadrates IKLD.

Der Mittelpunkt der Strecke BD hat nach dem Strahlensatz die Höhe $\frac{a}{2}$, also dieselbe Höhe, die A und C und folglich alle Punkte der Strecke AC haben. Sein Bildpunkt, der Mittelpunkt von B'D', also E', liegt auf A'C'. Daher schneiden sich die Strecken BD und AC in diesem Punkt. Also liegen die vier Punkte A, B, C, D in einer gemeinsamen Ebene e. Der einzige unter den fünf Punkten A, B, C, D, E außerhalb e ist E; somit kann es als einziges Polyeder mit A, B, C, D, E als Ecken nur die Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze E geben. Die Punkte A, B, C, D, E selbst sind in ihrer Lage gegenüber der Zeichenebene bis auf Verschiebung eindeutig bestimmt; daher ist die Pyramide ABCDE bis auf Kongruenz das einzige Polyeder, auf das die in der Aufgabe erfolgte Beschreibung zutrifft.
Die Ebene e zerlegt den Würfel in zwei Teilpolyeder ABCLDIK und ADCGBFH. Die Summe ihrer Volumina beträgt folglich a^3. Bei der Drehung um AC als Achse und mit 180° als Drehwinkel vertauschen sich diese beiden Teilpolyeder miteinander. Sie haben daher einander gleiches Volumen; dieses beträgt somit $\frac{1}{2}a^3$.
Aus dem Polyeder ABCLDIK erhält man die Pyramide ABCDE, indem man die Pyramiden mit den Grundflächen ABKI, BCLK, CLD bzw. DIA und der gemeinsamen Spitze E entfernt. Die ersten beiden Grundflächen sind je ein Trapez mit parallelen Seiten der Längen a, $\frac{a}{2}$ und mit der Höhenlänge a, also dem Flächeninhalt $\frac{3}{4}a^2$; die letzten beiden Grundflächen sind je ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a, $\frac{a}{2}$, also dem Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$. In allen vier Pyramiden gilt: Das Lot von E auf die jeweilige Grundfläche verläuft in dem Quadrat IKLD; seine Länge beträgt $\frac{a}{2}$. Damit ergibt sich als Volumen von ABCDE

$$\frac{1}{2}a^3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{a}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{6}a^3.$$

<u>Bemerkung:</u>
Es gibt einige andere Beweismöglichkeiten z. B. für die Aussage, daß A, B, C, D in einer gemeinsamen Ebene liegen. So kann man diese Aussage auch aus AB $\parallel$ DC erhalten und dies etwa damit herleiten, daß man ABGM (mit M als Mittelpunkt von HD) als Rechteck nachweist. Man beachte übrigens, daß z. B. die Feststellung lediglich von $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ noch nicht für den gewünschten Beweis der Aussage ausreicht.