XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>291031</u>

Man stelle fest, ob die Zahl

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{1989 + \sqrt{1990}}}}}$$

rational oder irrational ist.

<u>291032</u>

In einem Lande gebe es eine Anzahl $n \geqq 3$ von Städten $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Für je zwei Städte S_i, S_j mit $i < j$ gebe es genau eine von von S_i nach S_j führende Einbahnstraße und genau eine von S_j nach S_i führende Einbahnstraße; dies seien alle Straßen des Landes. Auf einer Landkarte seien diese Straßen unter Verwendung von genau $n-1$ Farben so gefärbt, daß für jede Stadt gilt: Die $n-1$ von dieser Stadt ausgehenden Straßen sind mit den $n-1$ Farben gefärbt, jede mit genau einer Farbe.

Untersuchen Sie für jedes $n \geqq 3$, ob man eine Färbung der Straßen unter Einhaltung dieser Bedingungen so wählen kann, daß für eine einheitlich gewählte Reihenfolge $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ der Farben die folgende Aussage (*) zutrifft!

(*) Für jede Stadt S_i ($i = 1, \ldots, n$) gilt: Startet man in S_i und fährt der Reihe nach auf den Straßen der Farben $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$, jeweils auf einer dieser Straßen bis zur nächsten Stadt, so endet diese Fahrt stets in der Stadt S_1.

A 10;I

291033

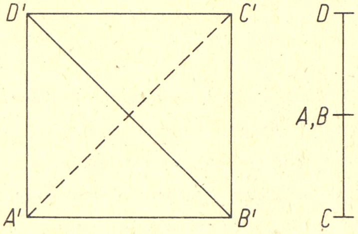

Abb. A 291033

Die Abbildung A 291033 stellt in senkrechter Eintafelprojektion einen ebenflächig begrenzten Körper dar, der genau vier Eckpunkte A, B, C, D hat. Ihre Bildpunkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im beigefügten Höhenmaßstab hat D die Höhendifferenz a zu C, und A, B haben die Höhendifferenz $\frac{a}{2}$ zu C.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen des Körpers!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

291034

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (*) erfüllen

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1! \qquad (*)$$

291035

Man begründe und beschreibe eine Konstruktion, durch die zu beliebig vorgegebenen Dreiecken ABC alle diejenigen Geraden g erhalten werden können, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen:

(1) Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt M der Seite AC.

(2) Die Gerade g schneidet die Verlängerung der Seite BA über A hinaus in einem Punkt P und folglich die Seite BC in einem Punkt Q.

(3) Der Flächeninhalt des Dreiecks AMP ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CMQ.

Man zeichne ein beliebiges, nicht gleichschenkliges und nicht rechtwinkliges Dreieck ABC und führe dann die beschriebene Konstruktion aus.

291036

a) Man beweise, daß es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m sowie eine Möglichkeit gibt, m Vorzeichen (jeweils + oder -) derart zu wählen, daß mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm m^2 = k \qquad (*)$$

gilt.

b) Man beweise, daß es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen (*) gilt.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

291031) Lösung: 5 Punkte

Da die Zahl 1990 keine Quadratzahl ist, ist $\sqrt{1990}$ irrational.
Wir beweisen nun die Hilfsaussage, daß stets $y = \sqrt{a+b}$ irrational ist, falls a rational und b irrational ist: Wäre $y = \sqrt{a+b}$ rational, so müßten auch $y^2 = a+b$ und folglich $b = y^2 - a$ rational sein. Wegen dieses Widerspruchs war die Annahme falsch; damit ist die Hilfsaussage bewiesen.
Durch wiederholte Anwendung dieser Hilfsaussage folgt, daß die in der Aufgabe genannte Zahl x irrational ist.

291032) Lösung: 7 Punkte

Eine solche Färbung ist möglich, wie das folgende Beispiel zeigt:

Von ↓ nach →	S_1	S_2	S_3	...	S_{n-3}	S_{n-2}	S_{n-1}	S_n
S_1		F_{n-1}	F_{n-2}	...	F_4	F_3	F_2	F_1
S_2	F_{n-1}		F_{n-2}	...	F_4	F_3	F_2	F_1
S_3	F_{n-1}	F_{n-2}		...	F_4	F_3	F_2	F_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots\vdots\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_{n-3}	F_{n-1}	F_{n-2}	F_{n-3}			F_3	F_2	F_1
S_{n-2}	F_{n-1}	F_{n-2}	F_{n-3}	...	F_3		F_2	F_1
S_{n-1}	F_{n-1}	F_{n-2}	F_{n-3}	...	F_3	F_2		F_1
S_n	F_{n-1}	F_{n-2}	F_{n-3}	...	F_3	F_2	F_1	

(Für kleine Werte von n ist diese Tabelle sinngemäß zu reduzieren.) Ersichtlich haben für jede Stadt die von ihr ausgehenden Straßen die geforderten Farben; ferner bestätigt man: Die nacheinander durchfahrenen Straßen der Farben F_1 und F_2 führen von jeder Stadt S_i aus nach S_{n-2} (im Fall $i=n$ über S_{n-1}, in allen Fällen $i < n$ über S_n). Ist $n=3$, so ist man damit in S_1; ist $n > 3$, so gelangt man von S_{n-2} aus auf den Straßen der Farben F_3, ..., F_{n-1} (in der Tabelle unterhalb der Hauptdiagonale) über S_{n-3}, ..., S_2 nach S_1, wie in (*) verlangt.

291033, Lösung: 7 Punkte

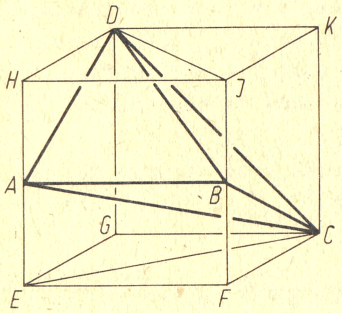

Abb. L 291033

Wie in Abbildung L 291033 gezeigt, kann der Körper ABCD aus einem Würfel EFCGHIKD erhalten werden, indem man die Pyramiden ABFEC, ABIHD, ADGEC, BCKID entfernt. Die ersten beiden haben als Grundfläche je ein Rechteck mit den Seitenlängen a, $\frac{a}{2}$, also dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot a^2$. Die letzten beiden haben als Grundfläche je ein Trapez mit parallelen Seiten der Längen a, $\frac{a}{2}$ und der Höhenlänge a, also dem Flächeninhalt $\frac{3}{4}\cdot a^2$. Alle vier Pyramiden haben die Höhenlänge a. Damit ergibt sich als gesuchtes Volumen von ABCD

$$V = a^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot a^3 - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot a^3 = \frac{1}{6}\cdot a^3.$$

2. Lösungsweg: Wegen $DK \parallel AB$ hat K denselben Abstand von der Ebene durch A,B,C wie D, also hat ABCD dasselbe Volumen wie ABCK. Wählt man als Grundfläche von ABCK das Dreieck BCK, so ist $\overline{AB} = a$ die zugehörige Höhenlänge. Im Dreieck BCK ist $\overline{CK} = a$, und B hat von CK den Abstand a; also hat BCK den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot a^2$. Damit ergibt sich das gesuchte Volumen $V = \frac{1}{6}\cdot a^3$.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

291034) Lösung: **7 Punkte**

Für $x < -5$ ist (*) nicht erfüllt, da $x + 5 < 0$ ist, also $\sqrt{x+5}$ nicht existiert.

Für $-5 \leq x < -1$ ist (*) nicht erfüllt, da $\sqrt{x+5} \geq 0$, $x + 1 < 0$,

also $\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} \leq 0 < 1$ gilt.

Für $x = -1$ ist (*) nicht erfüllt, da $x + 1 = 0$ ist, also $\frac{\sqrt{x+5}}{x+1}$ nicht existiert.

Für $x > -1$ ist (*) wegen $x + 1 > 0$ der Reihe nach äquivalent mit

$$\sqrt{x+5} > x + 1,$$

$$x + 5 > x^2 + 2x + 1,$$

$$x^2 + x - 4 < 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{17}{4},$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{17} < x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{17},$$

$$-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) < x < \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1). \qquad (1)$$

Da $\sqrt{17} > 1$, also $-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) < -1$ gilt, ist (1) für $x > -1$ äquivalent mit

$$-1 < x < \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1). \qquad (2)$$

Die gesuchten Zahlen, die (*) erfüllen, sind also genau alle Zahlen des in (2) genannten Intervalls.

291035) Lösung: **7 Punkte**

Eine Gerade g, für die (1) und (2) gilt, erfüllt wegen $\overline{AM} = \overline{MC}$ genau dann auch (3), wenn der Abstand des Punktes P von der Geraden durch A,C doppelt so groß ist wie der Abstand des Punktes Q von dieser Geraden. Nach dem Strahlensatz ist dies genau dann der Fall, wenn $\overline{PM} = 2 \cdot \overline{MQ}$ gilt. Aus dem Strahlensatz folgt ferner: Die Parallele durch M zu BC schneidet einerseits die Seite AB in ihrem Mittelpunkt R; andererseits ist die Bedingung $\overline{PM} = 2 \cdot \overline{MQ}$ äquivalent mit $\overline{PR} = 2 \cdot \overline{RB} = \overline{AB}$, also mit

$$\overline{PA} = (\overline{PR} - \overline{AR} =)\ \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}.$$

Daher werden (zu gegebenem Dreieck ABC) die Bedingungen (1), (2), (3) genau von derjenigen Geraden g erfüllt, die durch folgende Konstruktion erhalten werden kann (Abb. L 291035):
Man konstruiert die Mittelpunkte M bzw. R von AC bzw. AB und verlängert BA über A hinaus um die Länge $\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}$ bis P. Dann konstruiert man die Gerade g durch P und M.

Bemerkung: Wie schon aus dem Beweis ersichtlich, können mehrere andere Konstruktionen zur gesuchten Geraden g führen (Hilfsstrecken senkrecht zu AC oder einander parallel in einer anderen Richtung, z. B. parallel zu BC; Verlängerung von CA um $\frac{1}{2}\cdot\overline{CA}$ usw.). Manche dieser Konstruktionen gestatten Begründungen, die kürzer als oben verlaufen.

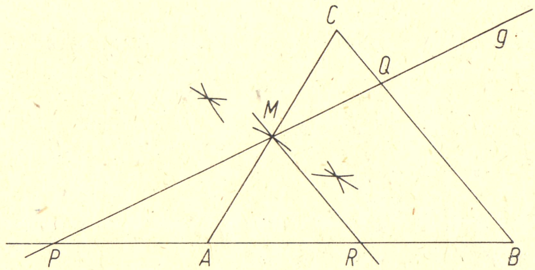

Abb. L 291035

291036) Lösung: 7 Punkte

a) Man bestätigt durch Nachrechnen

$$1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 = 0, \quad (0)$$

$$1^2 = 1, \quad (1)$$

$$-1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 2, \quad (2)$$

$$-1^2 + 2^2 = 3 \quad (3)$$

sowie für jede natürliche Zahl n

$$(n+1)^2-(n+2)^2-(n+3)^2+(n+4)^2 = 2n-4n-6n+8n+1^2-2^2-3^2+4^2=4 \quad (4)$$

Für jede natürliche Zahl k gibt es natürliche Zahlen q, r mit $k = r + 4q$ und $r \leqq 3$.

Setzt man $m_0 = 7$, $m_1 = 1$, $m_2 = 4$, $m_3 = 2$, so kann man nach (0), (1), (2) oder (3) die Zahl r in der Form

$$r = \pm 1^2 \pm \ldots \pm m_r^2$$

darstellen. Ist $q = 0$, so ist damit k in der geforderten Form (*) dargestellt.

Ist $q > 0$, so kann man $n_1 = m_r$, $n_2 = m_r + 4$, ..., $n_q = m_r + (q-1)\cdot 4$ setzen und dann nach (4), angewandt auf $n=n_1$, $n=n_2$, ..., $n=n_{q-1}$, die Zahl k in der geforderten Form (*) nämlich

$$\begin{aligned} k = r + 4q = \pm 1^2 \pm \ldots \pm m_r^2 & \\ &+ (n_1+1)^2 - (n_1+2)^2 - (n_1+3)^2 + (n_1+4)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (n_q+1)^2 - (n_q+2)^2 - (n_q+3)^2 + (n_q+4)^2, \end{aligned}$$

darstellen, w.z.b.w.

b) Für jede natürliche Zahl m folgt aus (4), angewandt mit $n = m$ und $n = m + 4$,

$$\begin{aligned} &(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 \\ &- (m+5)^2 + (m+6)^2 + (m+7)^2 - (m+8)^2 = 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Zu jeder - nach a) existierenden - Darstellung

$k = \pm 1^2 \pm \ldots \pm m^2$ gibt es daher auch die Darstellung

$k = \pm 1^2 \pm \ldots \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - \ldots + (m+7)^2 - (m+8)^2$.

Dieses Bilden weiterer Darstellungen der Zahl k kann man beliebig oft fortsetzen. Damit ist auch der in b) verlangte Beweis geführt.