A 10

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

291021

Man ermittle alle diejenigen Paare (x;y) reeller Zahlen x und y, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9}, \qquad (1)$$

$$\frac{x + \sqrt{x}}{y + \sqrt{y}} = \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

291022

Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht:
Auf einem Spielbrett sind 8 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.
Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um zwei Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um einen Schritt. Dieses Voransetzen beider Steine gilt dann als ein "Zug". Werfen beide Spieler die gleiche Augenzahl, so wird kein "Zug" ausgeführt, sondern nochmals gewürfelt. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, daß ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).
Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines "Zuges"

der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht. Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.

Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von "Zügen", aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann?
Begründen Sie Ihre Antwort!

291023

Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD. Dabei sei $\overline{AB} > \overline{CD}$. Man zeige, daß sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen läßt, wenn $\overline{AB} < 3\overline{CD}$ gilt.

291024

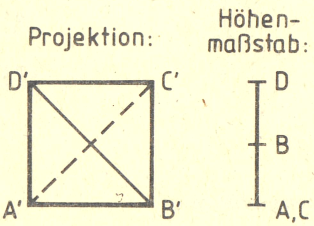

Abb. A 291024

Die Abbildung A 291024 stellt einen ebenflächig begrenzten Körper ABCD in senkrechter Eintafelprojektion dar. Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im Höhenmaßstab haben A, C von D ebenfalls den Abstand a, während B im Höhenmaßstab den Abstand $\frac{a}{2}$ von D hat.

a) Zeichnen Sie diesen Körper ABCD in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45^\circ$, $q = \frac{1}{2}$ sei!

b) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben das Volumen V(ABCD) des Körpers!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

291021) Lösung: 10 Punkte

I. Wenn reelle Zahlen x und y die Gleichungen (1) und (2) erfüllen, so folgt:

Nach (1) gilt

$$y = \frac{9}{4} x, \qquad (3)$$

nach (2) gilt

$$2x + 2\sqrt{x} = y + \sqrt{y}. \qquad (4)$$

Setzt man (3) in (4) ein, so folgt

$$2x + 2\sqrt{x} = \frac{9}{4} x + \frac{3}{2}\sqrt{x} ,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{4} x,$$

$$\frac{1}{4} x = \frac{1}{16} x^2. \qquad (5)$$

Nach (1) ist $x \neq 0$; somit folgt aus (5)

$$x = 4.$$

Hieraus und aus (3) folgt

$$y = 9.$$

II. Für diese Werte $x = 4$, $y = 9$ existieren $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$, da x und y positiv sind, und es gilt (1) sowie $x + \sqrt{x} = 4 + 2 = 6$, $y + \sqrt{y} = 9 + 3 = 12$, also (2).

Mit I., II. ist bewiesen, daß (1), (2) genau von dem Paar $(x;y) = (4;9)$ erfüllt werden.

291022) Lösung: 10 Punkte

I. Wenn ein Spiel nach n "Zügen" unentschieden endet, so beträgt die Summe der Anzahlen aller von beiden Steinen insgesamt zurückgelegten Schritte 3n. Ferner hat dann der Stein des einen Spielers eine Anzahl a vollständiger Umläufe zurückgelegt und der

Stein des anderen Spielers eine Anzahl b vollständiger Umläufe, also gilt $s = 8a + 8b = 8(a+b)$. Folglich ist s ein ganzzahliges Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen 24 der Zahlen 3 und 8; d. h., es gilt $s = 24g$ mit einer ganzen Zahl g. Daher ist $3n = 24g$, $n = 8g$.[1]

Wäre hierbei $g = 1$, $n = 8$, so folgte $8(a+b) = s = 24$, $a + b = 3$, was mit positiven ganzen Zahlen a, b auf $a = 1$, $b = 2$ oder $a = 2$, $b = 1$ führen würde; d. h., der Stein eines Spielers hätte genau einen vollen Umlauf zurückgelegt, woraus wegen $n = 8$ folgte, daß er in jedem dieser 8 "Züge" nur einen Schritt zu gehen hätte, der des anderen Spielers also stets zwei Schritte. Das führt auf den Widerspruch, daß dessen Stein beim vierten Zug auf das Feld A gekommen wäre.

Also muß $g \geqq 2$ sein, d. h.: In weniger als 16 "Zügen" kann kein unentschiedenes Spiel entstehen.

II. In 16 "Zügen" kann ein unentschiedenes Spiel entstehen, z. B. folgendermaßen (die Felder nach A seien mit 1,...,7 numeriert):

	Zug	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Spieler 1	Schrittzahl	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2
	erreichtes Feld	1	3	5	7	1	3	4	5	7	1	2	3	4	5	6	A
Spieler 2	Schrittzahl	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1
	erreichtes Feld	2	3	4	5	6	7	1	3	4	5	7	1	3	5	7	A

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchte kleinstmögliche Anzahl von "Zügen", aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann, beträgt 16.

---

[1] Bis zu diesem Teilergebnis kann man die Schlußweise auch als aus 291013 bekannt zitieren.

291023) Lösung: 10 Punkte

Die Seitenlängen AB, CD und die Höhe des Trapezes seien wie üblich mit a, c bzw. h bezeichnet.

Jede zu einem Schenkel, o.B.d.A. zu AD parallele Gerade, die das Trapez in zwei Vierecke zerlegt, muß AB in einem Punkt X zwischen A und B sowie CD in einem Punkt zwischen C und D schneiden (sonst ergäbe sich entweder überhaupt keine Zerlegung des Trapezes oder eine Zerlegung in ein Fünfeck und ein Dreieck). Die entstehenden Vierecke sind das Parallelogramm AXYD und das Trapez XBCY. Mit $x = \overline{AX} = \overline{DY}$ sowie wegen $c < a$ ist die Bedingung, daß X zwischen A und B sowie Y zwischen C und D liegt, äquivalent mit

$$x < c. \qquad (1)$$

<u>1. Fortsetzungsmöglichkeit:</u> Wegen $\overline{XB} = a-x$ und $\overline{YC} = c-x$ haben die genannten Vierecke die Flächeninhalte

$$F(AXYD) = x \cdot h, \quad F(XBCY) = \frac{1}{2}(a-x + c-x) \cdot h = (\frac{1}{2}(a+c) - x) \cdot h.$$

Also gibt es genau dann eine zu AD parallele Gerade mit $F(AXYD) = F(XBCY)$, wenn es eine Streckenlänge x mit (1) und

$$x \cdot h = (\frac{1}{2}(a+c) - x) \cdot h \qquad (2)$$

gibt.

Die Gleichung (2) ist nun der Reihe nach äquivalent mit

$$x = \frac{1}{2}(a+c) - x,$$

$$2x = \frac{1}{2}(a+c),$$

$$x = \frac{1}{4}(a+c).$$

Diese Zahl erfüllt genau dann (1), wenn

$$\frac{1}{4}(a+c) < c$$

gilt, und dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$a+c < 4c,$$

$$a < 3c,$$

wie es zu zeigen war.

<u>2. Fortsetzungsmöglichkeit:</u> Wächst x von 0 bis c, so wächst F(AXYD) vom Wert 0 an. Also läßt sich bei Einschränkung von x auf Werte $x < c$ genau dann für F(AXYD) der Wert $\frac{1}{2}F(ABCD)$ erreichen, wenn F(AXYD) für $x = c$ einen größeren Wert als $\frac{1}{2}F(ABCD)$ annimmt, d. h. genau dann, wenn

$$c \cdot h > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(a+c) \cdot h$$

gilt. Diese Ungleichung ist äquivalent mit

$$c > \frac{1}{4}(a+c),$$

$$a < 3c.$$

Hinweis zu anderen Lösungsdarstellungen und zur Korrektur:

Die Aufgabe verlangt den Nachweis der beiden folgenden Teilaussagen (I), (II):
(I) Wenn eine Zerlegung der genannten Art existiert, dann gilt $a < 3c$.
(II) Wenn $a < 3c$ gilt, dann existiert eine Zerlegung der genannten Art.
Bei Beweisdarstellungen, die diesen Nachweis nicht wie oben durchgehend vermittels einzelner logischer Äquivalenz-Schritte erbringen, ist zu beachten: Aus einer Beweisdarstellung etwa zu (I) in einzelnen, als logische Schlüsse ablaufenden Teilschritten ist es nicht stets möglich, eine einwandfreie Beweisdarstellung zu (II) dadurch zu erhalten, daß man nur jeweils zu diesen Teilschritten eine Umkehrung bildet. Das liegt u. a. daran, daß es gemeinsame Voraussetzungen für (I) und (II) gibt, z. B. Flächeninhaltsformeln, aus denen man in (I) ebenso wie in (II) in gleicher logischer Schlußrichtung Konsequenzen zu ziehen hat.

291024) Lösung: 10 Punkte

a) Abbildung L 291024. (Gefordert ist nur die Wiedergabe des Körpers ABCD; als nützlich erweist sich ein Konstruktionsbeginn mit dem im folgenden beschriebenen Würfel AFCHEIGD; zur leichteren Erkennbarkeit der Pyramiden AEIBD, CGIBD ist auch die Strecke ID eingezeichnet.)

b) Auf den Projektionsgeraden durch A, B, C und D mögen in dieser Reihenfolge zusätzlich die Punkte E, F, G, H liegen, auf der Projektionsgeraden durch B außerdem der Punkt I. Dabei sollen E, G und I die gleiche Höhe wie D haben, F und H dagegen die gleiche Höhe wie A.
Damit ist AFCHEIGD ein Würfel, dessen Volumen a^3 beträgt.
AFCB ist ein Tetraeder, bei dem man das rechtwinklige Dreieck AFC als Grundfläche und FB als zugehörige Höhe ansehen kann, dessen Volumen also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{12} a^3$$

beträgt. AHCD ist ein Tetraeder; sein Volumen ergibt sich entsprechend zu

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{1}{6} a^3.$$

Weiter sind AEIBD und CGIBD Pyramiden, jeweils mit einem Trapez, AEIB bzw. CGIB als Grundfläche und ED bzw. GD als zugehöriger Höhe.

L 10

Jede dieser Pyramiden hat also das Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{2}\right) a \cdot a = \frac{1}{4} a^3.$$

Werden die Tetraeder AFCB, AHCD und die Pyramiden AEIBD, CGIBD von dem Würfel abgetrennt, so bleibt der im Aufgabentext beschriebene Körper ABCD übrig; sein Volumen ist daher

$$V(ABCD) = a^3 - \frac{1}{12} a^3 - \frac{1}{6} a^3 - 2 \cdot \frac{1}{4} a^3 = \frac{1}{4} a^3.$$

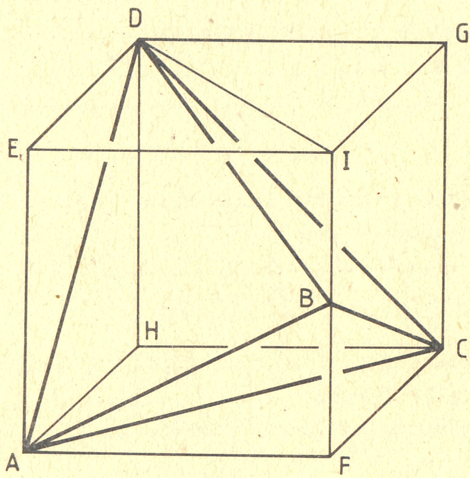

Abbildung L 291024

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

291021

Rechnerisch richtige Ermittlung von x, y 6
Berücksichtigung Divisor $\neq 0$ 2
Vollständigkeit im logischen Aufbau (z. B. Probe) 2
10

291022

Teilbarkeit der Zugzahl durch 8 (oder äquivalente Aussage).. 4
Ausschließen der Zugzahl 8 3
Möglichkeitsnachweis der Zugzahl 16 3
10

291023

Erfassung der Problemstellung bis zur Erkenntnis, daß
X zwischen A und B, Y zwischen C und D 2
Beweis 8
10

291024

a) 4
b) Zerlegung in geeignete Teilkörper 3
Berechnung der Teilvolumina und Endergebnis 3
10