XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>290931</u>

Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden!

Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken AB und AC, die einen Winkel ∢ BAC der Größe 7° bilden. Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.

Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

<u>290932</u>

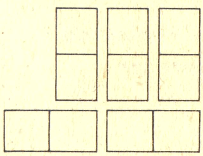

Abb. A 290932

Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die in Abbildung A 290932 gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen: Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Zifferndarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen. Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz Dominosteine bilden lassen!

A 9;I

<u>Hinweis:</u> Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0,1,2,3,4,5,6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein $\boxed{x \mid y}$ mit $0 \leqq x \leqq y \leqq 6$ genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

<u>290933</u>

Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:

(1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte A,B,C,D,E.

(2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte A',B',C',D' bzw. E' die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von "oben" nach "unten" bezeichnet), so sind Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie in Abbildung A 290933 angegeben.

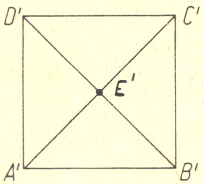

Abb. A 290933

(3) Die durch A,B,C gehende Ebene ε ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.

(4) Der Punkt D liegt "oberhalb" der Ebene ε im Abstand $\frac{a}{2}$ von ihr.

(5) Der Punkt E liegt "oberhalb" der Ebene ε im Abstand a von ihr.

(6) Der Körper hat das Volumen $\frac{1}{4} \cdot a^3$.

Zeigen Sie, daß der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

290934

Beweisen Sie, daß es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

290935

a) Beweisen Sie, daß es zu jeder Funktion f, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x-1) = (x^2 - 1) \cdot f(x+1) \qquad (*)$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt!

b) Beweisen Sie, daß es eine Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung (*) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl x den Funktionswert $f(x) = 0$ hat!

290936

Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien r_1 bzw. r_2 gelte $r_1 > r_2$. Eine Gerade, die k_1 und k_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, sei t. Die von t verschiedene und zu t parallele Tangente an k_1 sei u.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von r_1 und r_2 den Radius r_3 desjenigen u berührenden Kreises k_3, der k_1 und k_2 von außen berührt!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

290931) Lösung: **6 Punkte**

Konstruktionsbeschreibung: Man konstruiert den Kreis k um A durch B; er schneidet den durch C gehenden Schenkel des gegebenen Winkels in S_1. Ausgehend von $S_0 = B$ und S_1 konstruiert man nun nacheinander für $i = 1, 2, \ldots, 102$ den Kreis um S_i mit dem Radius $\overline{S_0S_1}$ und seinen von S_{i-1} verschiedenen Schnittpunkt S_{i+1} mit k. Dann konstruiert man, ausgehend von $T_0 = S_0$ und $T_1 = S_{103}$, nacheinander für $j = 1, \ldots, 5$ den Kreis um T_j mit dem Radius $\overline{T_0T_1}$ und seinen von T_{j-1} verschiedenen Schnittpunkten T_{j+1} mit k. Die Strahlen aus A durch $T_1, \ldots, T_6$ zerlegen dann den Winkel $\sphericalangle BAC$ in sieben gleichgroße Teile.

Begründung: Nach Konstruktion wird $\overline{\sphericalangle S_0AS_i}$ bis auf ganzzahlige Vielfache der Vollwinkelgröße 360° gleich $i \cdot 7^\circ$. Insbesondere wird $\overline{\sphericalangle T_0AT_1} = \overline{\sphericalangle S_0AS_{103}} = 103 \cdot 7^\circ - 2 \cdot 360^\circ = 1^\circ$; daher wird, wie behauptet, $\sphericalangle BAC$ in die sieben gleich großen Teile $\sphericalangle T_{j-1}AT_j$ $(j = 1, \ldots, 7)$ zerlegt.

Andere Lösungsdarstellungen und -wege: In der Konstruktionsbeschreibung kann als bekannter Sachverhalt verwendet werden, daß das Antragen und folglich das Addieren, Subtrahieren und Vervielfachen von Winkeln, das Halbieren von Winkeln sowie das Konstruieren weiterer spezieller Winkel wie z. B. 60° (Konstruktion von gleichseitigen Dreiecken) durch die zugelassene Verwendung von Lineal und Zirkel möglich sind.

Dementsprechend ist z. B. ein folgendermaßen gefaßter Lösungsweg als ausreichend zu akzeptieren:

Durch Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks erhält man einen Winkel von 60°. Durch zweimaliges Halbieren und anschließendes zweimaliges Subtrahieren von 7° erhält man einen Winkel von $15^\circ - 14^\circ = 1^\circ$. Durch wiederholtes Antragen dieses Winkels läßt sich der gegebene Winkel $\sphericalangle BAC$ in sieben gleich große Teile zerlegen.

290932) Lösung: 7 Punkte

I. In jeder zu bildenden Figur (Abb. L 290932a) muß durch einen

a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
d_1 d_2	e_1 e_2	

Abb. L 290932 a

Übertrag bei der Addition der Hunderterziffern a_1, a_2 und eines eventuell von den Zehnerziffern herkommenden Übertrags erreicht werden, daß die Anfangsziffer d_1 der Summe nicht Null ist. Wegen $a_1 \leqq 6$ und $a_2 \leqq 6$ gibt es hierbei für den Stein (d_1, d_2) nur die vier Möglichkeiten (1,0), (1,1), (1,2), (1,3)

Somit können nicht mehr als vier Figuren der geforderten Art nebeneinander aus dem Satz Dominosteine gebildet werden. Gäbe es die Möglichkeit, vier solche Figuren zu bilden, so wäre in der Figur mit $(d_1, d_2) = (1,3)$ nur $(a_1, a_2) = (6,6)$ möglich, und zwar nur zusammen mit einem Übertrag aus den Zehnerziffern. Daher wäre dann in der Figur mit $(d_1, d_2) = (1,2)$ für den Stein (a_1, a_2) nur noch (6,5) (in dieser oder der umgekehrten Reihenfolge (5,6)) möglich, und zwar ebenfalls nur zusammen mit einem Übertrag aus den Zehnerziffern. In der Figur mit $(d_1, d_2) = (1,1)$ wäre demnach für (a_1, a_2) nur noch einer der Steine (6,4), (5,5) möglich, wieder nur zusammen mit einem Übertrag aus den Zehnerziffern. Schließlich würde auch die Figur mit $(d_1, d_2) = (1,0)$ einen Stein (a_1, a_2) mit $a_1 + a_2 \geqq 9$ erfordern. Somit müßten insgesamt zur Bildung der vier Figuren mindestens sieben Steine mit einer Summe 9, 10, 11 oder 12 ihrer Zahlzeichen zur Verfügung stehen. Es gibt aber in dem Satz Dominosteine nur sechs Steine dieser Art, nämlich nur

(6,6), (6,5), (6,4), (6,3), (5,5), (5,4).

Also kann man höchstens drei Figuren der geforderten Art nebeneinander aus dem Satz Dominosteine bilden.

II. Drei solche Figuren sind z. B. (Abb. L 290932 b)

5	0	3		5	0	5		6	1	4
5	2	0	,	6	4	0	,	6	3	2
1 0	2 3			1 1	4 5			1 2	4 6	

Abb. L 290932 b

sie stellen ersichtlich richtig gerechnete Additionsaufgaben dar und bestehen aus sämtlich verschiedenen Steinen eines Satzes Dominosteine.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchte größtmögliche Anzahl von Figuren der genannten Art beträgt 3.

290933) Lösung: 7 Punkte

Von der Oberfläche des Körpers sind von "oben" betrachtet die vier Flächen ABE, BCE, CDE und ADE unverdeckt sichtbar. Da A,B,C,D nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen, müssen zur Oberfläche des Körpers noch zwei in voneinander verschiedenen Ebenen liegende Flächen gehören, die insgesamt die Eckpunkte A,B,C,D haben, d. h. entweder die beiden Flächen ABC, ACD oder die beiden Flächen ABD, BCD.

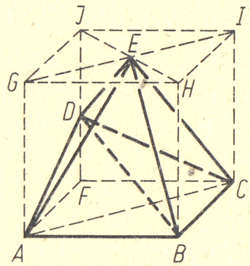

Abb. L 290933

Diese vier Flächen bilden die Oberfläche des Tetraeders ABCD. Es gibt daher genau zwei verschiedene Körper, die (1) bis (5) erfüllen: Zur Oberfläche des einen dieser Körper, K_1, gehören die Flächen ABD, BCD; zur Oberfläche des anderen, K_2, gehören ABC, ACD; und aus K_1 entsteht K_2 durch Hinzufügen des Tetraeders ABCD.

Man kann K_1 auch erhalten, indem man ABC zum Quadrat ABCF ergänzt, auf ihm den durch E gehenden Würfel ABCFGHIJ errichtet und von diesem die Pyramiden ABCFD, ABHGE, BCIHE, CDJIE und ADJGE wegnimmt. Die ersten drei haben je ein Quadrat der Seitenlänge a als Grundfläche, die letzten beiden je ein Trapez mit parallelen Seiten der Längen a, $\frac{a}{2}$ und der Höhenlänge a, also dem Flächeninhalt $\frac{3}{4} \cdot a^2$. Alle fünf Pyramiden haben die Höhenlänge $\frac{a}{2}$.

Damit folgt: K_1 hat das Volumen

$$a^3 - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot a^3 - 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot a^3 = \frac{1}{4} \cdot a^3.$$

Somit wird die Bedingung (6) von K_1 und folglich nicht von dem um ABCDE größeren Körper K_2 erfüllt. Damit ist, wie verlangt, bewiesen, daß die Bedingungen (1) bis (6) eindeutig einen Körper festlegen, nämlich den Körper K_1. Eine Darstellung in Parallelprojektion zeigt Abbildung L 290933.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

290934) Lösung: 6 Punkte

Für den geforderten Nachweis genügt es, zu a,b jeweils ein Beispiel zweier Zahlen x,y anzugeben, für die man die Aussagen nachweist, daß x rational, y irrational ist und daß $a < x < y < b$ gilt. Ein solches Beispiel bilden etwa die Zahlen

$$x = \frac{1}{2}\cdot(a + b),\quad y = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})\cdot a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot b,$$

wie mit den folgenden einzelnen Beweisen gezeigt werden kann:

(1) Aus $a < b$ folgt

$$\frac{1}{2}\cdot a < \frac{1}{2}\cdot b$$

und hieraus durch Addition von $\frac{1}{2}\cdot a$

$$a < x.$$

(2) Aus $a < b$ und $\sqrt{2} - 1 > 0$ folgt

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)a < \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)b$$

und hieraus durch Addition von $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})a + \frac{1}{2}\cdot b$

$$x < \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot b = y.$$

(3) Aus $a < b$ und $2 - \sqrt{2} > 0$ folgt

$$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})a < \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})b$$

und hieraus durch Addition von $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot b$

$$y < b.$$

(4) Nach den Sätzen, daß Summe, Produkt und Quotient rationaler Zahlen rational sind, ergibt sich: Mit a und b sind auch $a + b$ und $x = \frac{1}{2}(a + b)$ rational.

(5) Wäre y rational, so folgte nach den in (4) genannten Sätzen der Widerspruch, daß mit $y - a = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(b - a)$ auch $\frac{2(y - a)}{b - a} = \sqrt{2}$ rational wäre. Damit ist y als irrational nachgewiesen.

Bemerkungen:

Die als bekannter Sachverhalt verwendeten Sätze über Summe, Produkt und Quotient rationaler Zahlen und die Irrationalität von $\sqrt{2}$ können auch auf die Definition rationaler Zahlen (Differenz von Brüchen natürlicher Zahlen, also Quotient ganzer Zahlen) zurückgeführt werden.

Als weitere bekannte Sachverhalte können in (5) auch Sätze wie die folgenden verwendet werden: Die Summe aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist irrational; das Produkt aus einer von 0 verschiedenen rationalen und einer irrationalen Zahl ist irrational.

Statt eines so speziellen Beispiels wie oben können auch allgemeiner $x = a + u(b-a)$, $y = a + v(b-a)$ mit rationalem u, irrationalem v und $0 < u < v < 1$ verwendet werden.

290935) Lösung: 7 Punkte

a) Wendet man (*) mit $x = 1$ und dann der Reihe nach mit $x = -1, -3, -5, \ldots$ an, so folgt $f(0) = 0 \cdot f(2) = 0$ und dann

$$f(-2) = ((-1)^2-1) \cdot f(0) = 0, \quad f(-4) = ((-3)^2-1) \cdot f(-2) = 0, \ldots;$$

d. h., (mindestens) für alle ganzzahligen x, die negativ und gerade sind, gilt $f(x) = 0$.

b) Es werde beispielsweise[1]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot n!}, & \text{falls } x=2n \text{ mit ganzzahligem } n>0 \text{ ist;} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Hiermit gilt:

Ist $x-1$ nicht ganzzahlig, so gilt dasselbe für $x+1$;

ist $x-1$ ganzzahlig, aber keine gerade Zahl, so gilt dasselbe für $x+1$;

ist $x-1$ ganzzahlig, eine gerade Zahl und negativ, so ist $x+1$ (ganzzahlig, eine gerade Zahl und) nicht positiv;

in diesen drei Fällen gilt $f(x-1) = 0$ und $f(x+1) = 0$, also (*).

Ist $x-1 = 0$, so gilt $f(x-1) = f(0) = 0$ und $x^2-1 = 0$, also (*).

Ist $x-1 = 2n$ mit positivem ganzzahligem n, so ist $x+1 = 2(n+1)$ und auch $n+1$ positiv ganzzahlig; in diesem Fall folgt (*) aus

$$(x-1) \cdot (x+1) \cdot f(x+1) = 2n \cdot 2(n+1) \cdot \frac{1}{4^n \cdot n! \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{1}{4^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot n!} = f(x-1).$$

Also erfüllt f für alle reellen x die Gleichung (*). Es gilt aber beispielsweise $f(2) \neq 0$, nämlich $f(2) = 1$.

[1] Man kann die Werte $f(2n)$ $(n=1,2,\ldots)$ z.B. auch rekursiv durch $f(2)=1$, $f(2n+2) = \frac{1}{4n(n+1)} \cdot f(2n)$ definieren, ohne sie explizit anzugeben.

290936) Lösung: 7 Punkte

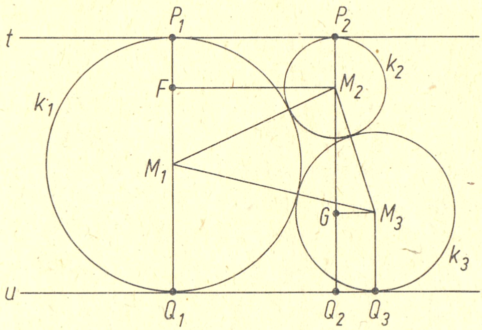

Abb. L 290936

Die Mittelpunkte von k_1, k_2, k_3 seien M_1, M_2, M_3. Die Berührungspunkte von t mit k_1, k_2 seien P_1, P_2 (siehe Abb. L 290936).

Da k_1 und k_2 sich von außen berühren, gilt $\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2$.

Ist M_2F das Lot von M_2 auf M_1P_1, so ist $P_1P_2M_2F$ wegen $M_1P_1, M_2P_2 \perp t$ ein Rechteck, also $\overline{FP_1} = r_2$, $FM_1 = r_1 - r_2$. Damit ergibt sich

$$\overline{P_1P_2} = \overline{FM_2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}. \qquad (1)$$

Für die Berührungspunkte Q_1, Q_3 von u mit k_1, k_3 folgt entsprechend

$$\overline{Q_1Q_3} = 2\sqrt{r_1r_3}. \qquad (2)$$

Da k_2 und k_3 sich von außen berühren, gilt $\overline{M_2M_3} = r_2 + r_3$. Die Verlängerung von P_2M_2 schneide u in Q_2, das Lot von M_3 auf P_2Q_2 sei M_3G. Wegen $t \parallel u$ und $M_1Q_1 \perp u$ geht P_1Q_1 durch M_1, und $P_1P_2Q_2Q_1$, $Q_2Q_3M_3G$ sind Rechtecke; also gilt $\overline{P_2Q_2} = 2r_1$, $\overline{GQ_2} = r_3$, $\overline{GM_2} = 2r_1 - r_2 - r_3$. Damit ergibt sich

$$\overline{Q_2Q_3} = \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (2r_1 - r_2 - r_3)^2} = 2\sqrt{r_1(r_2 + r_3 - r_1)}. \qquad (3)$$

Im Rechteck $P_1P_2Q_2Q_1$ ist $\overline{Q_1Q_2} = \overline{P_1P_2}$. Ferner liegen M_1, M_3 auf derselben Seite der Geraden durch P_1, Q_1, also liegen Q_2, Q_3 auf demselben von Q_1 ausgehenden Strahl. Für jede Lagemöglichkeit gilt damit $\overline{Q_2Q_3} = |\overline{Q_1Q_2} - \overline{Q_1Q_3}|$, und aus (1), (2), (3) folgt

$$\sqrt{r_1(r_2 + r_3 - r_1)} = |\sqrt{r_1r_2} - \sqrt{r_1r_3}|.$$

Nach Division durch $\sqrt{r_1}$, Quadrieren, Subtraktion von $r_2 + r_3$ und nochmaligem Quadrieren folgt

$$r_1^2 = 4r_2r_3,$$

als gesuchte Formel also

$$r_3 = \frac{r_1^2}{4r_2}.$$