XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

290921

Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

290922

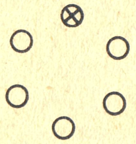


Abb. A 290922

Auf die Felder der Abbildung A 290922 sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl $a \geqq 1$ fest vorgegeben. Nun soll, beginnend mit dem angekreuzten Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis a. Der Stein, der dabei die Nummer a erhält, wird weggenommen. Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer a erhält, weggenommen. Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, daß leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.

a) Es sei $a = 4$. Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?

b) Jemand vermutet: "Wenn man a durch $a + 6$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine." Widerlegen Sie diese Vermutung, indem Sie sie für $a = 4$ nachprüfen!

c) Beweisen Sie, daß es eine Zahl z gibt, mit der für jedes $a \geqq 1$ die folgende Aussage wahr ist: "Wenn man a durch $a + z$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine [- auch bei Abzählbeginn im angekreuzten Feld -] ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

290923

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von n als auch Teiler der Quersumme von $n + 1$ ist.

290924

Die Abbildung A 290924 stellt sechs Punkte A, B, C, D, E, F in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar. Die Punkte C', B', D' und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 6$ cm. Die Punkte A' und F' sind die Mittelpunkte der in Abbildung A 290924 ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben A, F von B, D den Abstand 3 cm und C, E von B, D den Abstand 6 cm.

a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45^\circ$, $q = \frac{1}{2}$ sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte B, C, D, E gehören, und dazu die Punkte A und F!

b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen ABC und DEF durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke XY, die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben!

Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden! Eine Verdeckung durch davorliegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als "nicht vorhanden" oder "durchsichtig" zu betrachten).

Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck ABC parallel zu CB, im Dreieck DEF in

A 9

dichterer Schraffur parallel zu DE!

c) Geben Sie für die Schnittstrecke XY eine Herleitung der - von Ihnen in b) verwendeten - Konstruktion der Bildpunkte von X und Y! Beschreiben Sie diese Konstruktion!

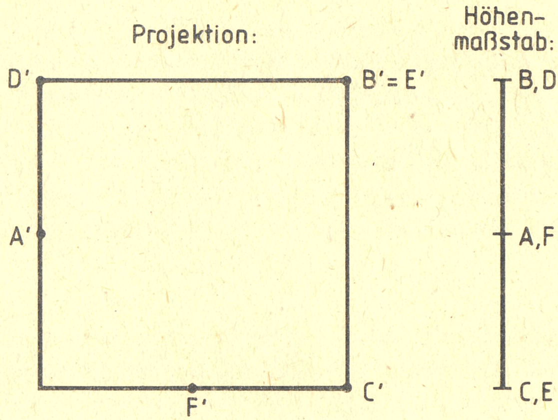


Abb. A 290924

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

290921) Lösung: **10 Punkte**

Nein; denn für jede Figur aus 1989 Geraden gilt:
Zwei dieser Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt. Jede weitere, als nächste betrachtete Gerade der Figur kann zu den bereits betrachteten Schnittpunkten jeweils höchstens so viele weitere Schnittpunkte in die Betrachtung einbringen, wie bereits Geraden vorher betrachtet waren.
Daher können insgesamt höchstens

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1987 + 1988$$

Schnittpunkte in der Figur enthalten sein.
Für diese Zahl s kann man entweder durch Berechnung (z. B. mit dem SR 1, und dabei günstig) mit der Summenformel

$$s = \frac{1988 \cdot 1989}{2}$$

den Wert s = 1977066 oder auch durch Abschätzung die Ungleichung

$$s < \frac{2000 \cdot 2000}{2},$$

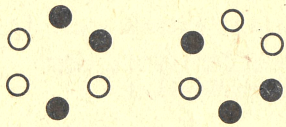
$$s < 2000000$$

finden, mit der die Antwort bewiesen ist.

290922) Lösung: **10 Punkte**

a) Die Durchführung des beschriebenen Abzählens zeigt, daß die Steine auf den in Abbildung L 290922a schwarz gezeichneten Feldern weggenommen werden. Bei der so angezeigten Verteilung bleiben also die drei weißen Steine übrig.

b) Für a = 10 ergibt sich ebenso, daß bei der Anfangsverteilung in Abbildung L 290922b die drei weißen Steine übrigbleiben. Wegen des Unterschiedes zu Abbildung L 290922a ist damit die $\boxed{\text{erste}}$ Vermutung widerlegt.



a b

Abb. L 290922

c) Für jede der drei Zahlen $n = 6, 5, 4$ gilt, wenn noch genau n Steine auf dem Brett sind:
Anstatt bis zur Nummer a abzuzählen, genügt es, das Abzählen nur auszuführen bis zur

kleinsten positiven Zahl a', die aus a durch geeignet oft durchgeführte Subtraktion von n zu erhalten ist.

Wählt man nun als z das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 6, 5, 4, also $z = 60$, und ersetzt a durch $a + 60$, so ist für jedes a

die kleinste positive Zahl, die aus $a + 60$ durch geeignet oft durchgeführte Subtraktion von n zu erhalten ist,

gleich der oben erklärten Zahl a'. Der Abzählvorgang mit der Endnummer $a + 60$ führt also insgesamt zu demselben Ergebnis wie der mit der Endnummer a. Damit ist die in c) genannte Aussage bewiesen.

<u>290923) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

I. Für jede natürliche Zahl a, deren letzte Ziffer nicht 9 ist, unterscheiden sich die Quersummen von n und von $n + 1$ um genau 1. Daher können nicht diese beiden Quersummen durch 5 teilbar sein.
II. Für jede natürliche Zahl n, deren letzte k Ziffern 9 lauten, während davor eine nicht mit 9 endende Folge von Ziffern steht, deren Summe s beträgt[1], gilt:
Die Quersumme von n ist $s + k \cdot 9$, die Quersumme von $n + 1$ ist $s + 1$. Daher sind genau dann beide Quersummen durch 5 teilbar, wenn

s bei Division durch 5 den Rest 4 läßt (1)

und

$4 + k \cdot 9$ durch 5 teilbar (2)

ist. Wegen $4 + k \cdot 9 = 5 + 10k - (k + 1)$ gilt (2) genau dann, wenn

k bei Division durch 5 den Rest 4 läßt. (2')

L 9

Die kleinsten natürlichen Zahlen k, s, die (1), (2') erfüllen, sind k = 4, s = 4. Also ist die in der Aufgabe gesuchte kleinste Zahl n = 49999.

---

[1] Falls vor den k Ziffern 9 keine Ziffer steht, ist s = 0 zu setzen.

<u>290924) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

a), b) Abbildung L 290924.

c) Die Ebenen e_1 bzw. e_2, in denen die Dreiecke ABC bzw. DEF liegen, schneiden sich in den Geraden durch C, D. Dies kann man folgendermaßen herleiten:
A ist der Mittelpunkt einer Seitenfläche des Würfels, die gegenüberliegende Seitenfläche hat CB als Diagonale. Also geht die Parallele durch A zu CB[1] durch den Punkt D. Daher liegt (außer C auch) D in e_1. Ebenso folgt: Die Parallele durch F zu DE[1] geht durch C, also liegt (außer D auch) C in e_2.
Damit ist gezeigt, daß man die gesuchten Bildpunkte von X, Y (aus den in a konstruierten Bildpunkten von A, B, C, D, E, F) nach folgender Beschreibung konstruieren kann:
Man konstruiere X als Schnittpunkt von AB mit CD und Y als Schnittpunkt von EF mit CD.

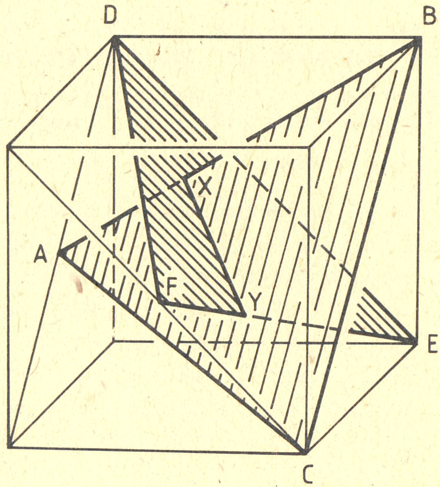


Abb. L 290924

---

[1] Die Wiedergabe dieser Parallelen wird nicht vom Schüler verlangt (sie ist allerdings nützlich, z. B. bereits zur Konstruktion von A und F).

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

290921

Effektives Verfahren erkannt	5
Rechnerische Begründung der Antwort	5
	10

290922

a)	2
b)	3
c)	5
	10

290923

Angabe der Zahl 49999	2
Prüfung der Quersummeneigenschaft	1
Nachweis der Minimalität	7
	10

290924

a)	2
b)	5
(davon für die richtigen Sichtbarkeitsverhältnisse 2)	
c)	3
(davon für die Beschreibung für Konstruktion X, Y 1)	10