XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

290831

Eine Aufgabe des bedeutenden englischen Naturwissenschaftlers Isaak Newton (1643 bis 1727) lautet:

> Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme. Im ersten Jahr verbrauchte er davon 100 Pfund; zum Rest gewann er durch seine Arbeit ein Drittel desselben dazu. Im zweiten Jahr verbrauchte er wiederum 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu. Im dritten Jahr verbrauchte er erneut 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu. Dabei stellte er fest, daß sich sein Geld gegenüber dem Anfang des ersten Jahres verdoppelt hatte.

Ermittle aus diesen Angaben, welche Geldsumme anfangs des ersten Jahres vorhanden gewesen sein muß!
Weise nach, daß bei dieser Anfangssumme die Angaben des Aufgabentextes zutreffen!

290832

Einem Kreisausschnitt soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die - aus zwei Strecken (Radien) und einem Kreisbogen bestehende - Randlinie des Kreisausschnitts enthält die vier Eckpunkte des Quadrates.

(2) Der Kreisbogen wird durch zwei dieser Eckpunkte in drei gleichlange Teilbögen zerlegt.

Untersuche, ob durch diese Bedingungen die Größe α des Zentriwinkels des Kreisausschnittes eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so gib diese Größe an!

A 8;I

290833

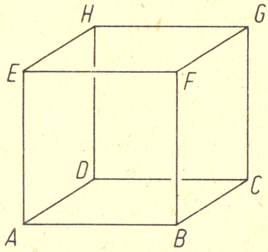

Abb. A 290833

In einem Würfel ABCDEFGH (vgl. Abb. A 290833) seien V, W, X, Y in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seitenflächen ABCD, BCGF, EFGH bzw. ABFE. Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Strecken VW, WX, XY und YV sämtlich einander gleichlang sind!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

290834

Ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

290835

Aus einer sechsstelligen natürlichen Zahl n soll eine weitere Zahl errechnet werden, indem eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einer höchstens dreistelligen natürlichen Zahl durchgeführt wird, wobei nur die Multiplikation mit 0 und die Division durch 0 nicht zugelassen sind. Auf das Ergebnis soll wieder eine der genannten Rechenoperationen angewandt werden, auf das neue Ergebnis ebenfalls usw.
Erst wenn ein Ergebnis den Wert 0 hat, soll das Bilden weiterer Zahlen nicht mehr fortgesetzt werden.

a) Gibt es sechsstellige Zahlen n, von denen ausgehend das Ergebnis 0 bereits mit zweimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist?

b) Beweise, daß von jeder sechsstelligen Zahl n aus, die nicht größer als 999000 ist, das Ergebnis 0 mit höchstens dreimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist!

A 8;II

290836

Von einem Viereck ABCD wird gefordert, daß es ein Trapez mit $AB \parallel DC$, $e = 7$ cm, $f = 6$ cm, $\alpha = 48^\circ$, $\varepsilon = 114^\circ$ ist, wobei e die Länge der Diagonale AC, f die Länge der Diagonale BD, α die Größe des Winkels $\sphericalangle$ DAB und, wenn S den Schnittpunkt von AC mit BD bezeichnet, ε die Größe des Winkels $\sphericalangle$ ASB ist.

a) Beweise: Wenn ein Viereck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen konstruiert werden!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Viereck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Beweise, daß durch die Forderungen ein Viereck ABCD bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

290831) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn die Angaben mit der Anfangssumme x Pfund zutreffen, so folgt:

Da durch Hinzugewinn eines Drittels einer Summe stets vier Drittel dieser Summe entstehen, ergibt sich am Ende des dritten Jahres die Summe von $(((x-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}$ Pfund. Also gilt nach der letzten Angabe des Aufgabentextes

$$(((x-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}=2x.$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren aller Klammern und anschließendes Multiplizieren mit dem Hauptnenner

$$((\frac{4}{3}\cdot x-\frac{400}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}=2x,$$

$$(\frac{16}{9}\cdot x-\frac{1600}{9}-\frac{400}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}=2x,$$

$$\frac{64}{27}\cdot x-\frac{6400}{27}-\frac{1600}{9}-\frac{400}{3}=2x,$$

$$64x-6400-4800-3600=54x,$$

also

$$10x=14800,$$

$$x=1480.$$

Die Anfangssumme muß folglich 1480 Pfund betragen haben.

II. Aus dieser Anfangssumme entsteht
im ersten Jahr durch Verbrauchen von 100 Pfund die Summe 1380 Pfund, durch Hinzugewinnen eines Drittels (460 Pfund) die Summe 1840 Pfund;
im zweiten Jahr entsprechend 1740 Pfund + 580 Pfund = 2320 Pfund;
im dritten Jahr 2220 Pfund + 740 Pfund = 2960 Pfund.

Da 2960 das Doppelte von 1480 ist, treffen bei der genannten Anfangssumme somit die Angaben des Aufgabentextes zu.

290832) Lösung: **8 Punkte**

Wenn die Bedingungen von einem Kreisausschnitt K mit dem Kreismittelpunkt M, den Radien MP, MQ und dem Zentriwinkel der Größe $\alpha = \overline{\sphericalangle PMQ}$ sowie von einem Quadrat ABCD erfüllt werden, wobei o.B.d.A. nach (1) die Punkte A und B so auf $\overset{\frown}{PQ}$ liegen, daß $\overset{\frown}{PQ}$ nach (2) in die gleichlangen Teilbögen $\overset{\frown}{PA}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BQ}$ zerlegt wird, so folgt:

Bei der Spiegelung an der Geraden g durch die Mittelpunkte E, F von AB bzw. CD werden A und B miteinander vertauscht, ebenso C und D miteinander. Also muß der Kreisausschnitt K in einen kongruenten Kreisausschnitt K' übergehen, der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ in den zu K' gehörenden Teilbogen $\overset{\frown}{BA}$, der folglich wegen der Kongruenz von K und K' mit $\overset{\frown}{AB}$ zusammenfällt; die Bögen $\overset{\frown}{PA}$ und $\overset{\frown}{QB}$ werden miteinander vertauscht, somit fällt K' mit K zusammen, g ist Symmetrieachse des Kreisausschnitts, geht durch M und halbiert den Bogen $\overset{\frown}{PQ}$.

Da zu gleichlangen Bögen eines Kreises auch gleichlange Sehnen und gleichgroße Zentriwinkel gehören, gilt somit einerseits $\overline{\sphericalangle PME} = \frac{\alpha}{2}$, wegen $g \parallel AD$ nach dem Stufenwinkelsatz also

$$\overline{\sphericalangle PDA} = \frac{\alpha}{2}, \qquad (3)$$

andererseits $\overline{\sphericalangle PMA} = \frac{\alpha}{3}$ und $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{AD}$, nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz also

$$\overline{\sphericalangle PDA} = \overline{\sphericalangle MPA} = \overline{\sphericalangle MAP} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{\alpha}{3}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{6}. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{6}$,

$$\frac{2}{3}\alpha = 90^\circ.$$

Daher ist die Größe des Zentriwinkels des Kreisausschnitts durch die Bedingungen eindeutig bestimmt; sie beträgt $\alpha = 135^\circ$.

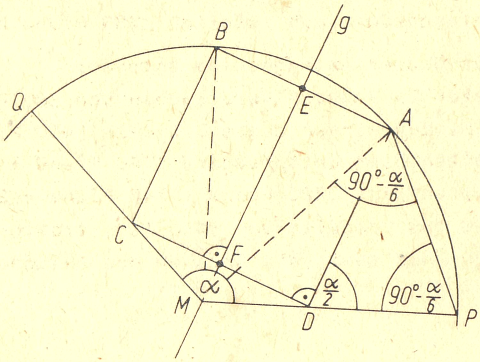

Abb. L 290832

290833) Lösung: 5 Punkte

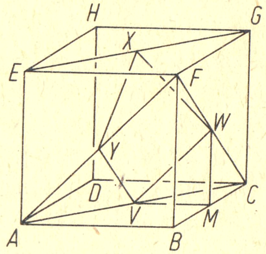

Abb. L 290833

Die Kantenlänge des Würfels sei a. Die Punkte V, W sind die Mittelpunkte der Quadrate ABCD, BCGF, die die Kante BC gemeinsam haben (siehe Abb. L 290836). Ist M der Mittelpunkt von BC, so ist[1] $VM \parallel AB$ und $\overline{VM} = \frac{a}{2}$. Entsprechend folgt $WM \parallel FB$ und $\overline{WM} = \frac{a}{2}$. Wegen $AB \perp FB$ ist folglich auch $VM \perp WM$; also ist VW die Hypotenuse in dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck VWM mit der Kathetenlänge $\frac{a}{2}$.

Für jede der Strecken WX, XY, YV folgt ebenso, daß sie die Hypotenuse in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Kathetenlänge $\frac{a}{2}$ sind, da ihre Endpunkte ebenfalls die Mittelpunkte jeweils zweier Quadrate sind, die eine Würfelkante gemeinsam haben. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Eine <u>andere Lösungsmöglichkeit</u> besteht darin, aus $\overline{AC} = \overline{CF} = \overline{FA} = a\sqrt{2}$ auf $\overline{\sphericalangle VCW} = \overline{\sphericalangle ACF} = 60^\circ$ zu schließen, dann mit $\overline{VC} = \overline{CW} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ das Dreieck VCW als gleichseitig mit der Seitenlänge $\overline{VW} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ zu erweisen und die entsprechenden Aussagen für $\overline{WX}$, $\overline{XY}$, $\overline{YV}$ zu erhalten.

---

1 Dies kann als bekannter Sachverhalt verwendet werden oder z. B. aus $\overline{CV} : \overline{CA} = 1 : 2 = \overline{CM} : \overline{CB}$ bewiesen werden.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

290834) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:

Mit (a,b,c) erfüllt auch (b,a,c) die Bedingungen (1), (2), (3). Daher kann o.B.d.A. vorausgesetzt werden, daß a,b,c außer (1), (2), (3) auch

$$a \geqq b \qquad (4)$$

erfüllen.

Wegen (1) und (2) gilt

$$c^3 + c = 130. \qquad (5)$$

Wäre $c < 5$ oder $c > 5$, so wäre $c^3 + c < 125 + 5 = 130$ bzw. $c^3 + c > 130$, beides im Widerspruch zu (5). Als muß

$$c = 5 \qquad (6)$$

sein, und aus (2) folgt

$$a + b = 125. \qquad (7)$$

Nach (3) gibt es eine ganze Zahl g mit $a - b = 19g$, also

$$a = 19g + b; \qquad (8)$$

wegen (4) ist dabei

$$g \geqq 0. \qquad (9)$$

Setzt man (8) in (7) ein, so folgt

$$19g + 2b = 125. \qquad (10)$$

Wäre g gerade, so auch $19g + 2b$, im Widerspruch zu (10). Also ist g ungerade. Wäre $g \geqq 7$, so folgte wegen $b \geqq 0$, daß $19g + 2b \geqq 19 \cdot 7 = 133$ wäre, ebenfalls im Widerspruch zu (10). Also ist g einer der Werte

$$g = 1,\ 3,\ 5. \qquad (11)$$

Aus (10), also $b = \frac{125 - 19g}{2}$, ergibt sich jeweils hierzu

$$b = 53,\ 34,\ 15 \qquad (12)$$

und damit nach (7) jeweils

$$a = 72,\ 91,\ 110. \qquad (13)$$

Daher und wegen (6) können (1), (2), (3), (4) nur von den Tripeln

$$(72,\ 53,\ 5),\quad (91,\ 34,\ 5),\quad (110,\ 15,\ 5) \qquad (14)$$

erfüllt werden; wegen der Eingangsbemerkung über (b,a,c) können (1), (2), (3) zusätzlich nur noch von

$$(53,\ 72,\ 5),\quad (34,\ 91,\ 5),\quad (15,\ 110,\ 5) \qquad (15)$$

erfüllt werden.

II. Die in (14), (15) genannten Tripel erfüllen (1), (2), (3), wie aus

$$72 + 53 = 91 + 34 = 110 + 15 = 5^3,$$
$$72 + 53 + 5 = 91 + 34 + 5 = 110 + 15 + 5 = 130,$$
$$72 - 53 = 19,\ 91 - 34 = 3\cdot 19,\ 110 - 15 = 5\cdot 19,$$
$$53 - 72 = (-1)\cdot 19,\ 34 - 91 = (-3)\cdot 19,\ 15 - 110 = (-5)\cdot 19$$

ersichtlich ist.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß (1), (2), (3) genau von den in (14) und (15) genannten Tripeln erfüllt werden.

Bemerkung: Beginnt man nicht mit der Einschränkung (4), so ist statt (9) nur

$$g \geqq -5 \qquad (9')$$

zu folgern, z. B. so: Wäre $g \leqq -7$, so folgte aus (10), daß $2b \geqq 125 + 19\cdot 7 = 258$, $b \geqq 129$, wegen $a \geqq 0$ also $a + b \geqq 129$ wäre, im Widerspruch zu (7).

Zu (11), (12), (13) kommen daher zusätzlich die Möglichkeiten

$$g = -5,\ -3,\ -1, \qquad (11')$$
$$b = 110,\ 91,\ 72, \qquad (12')$$
$$a = 15,\ 34,\ 53 \qquad (13')$$

hinzu.

290835) Lösung: 6 Punkte

a) Es gibt solche Zahlen. Um dies zu beweisen, genügt es, für ein Beispiel einer sechsstelligen Zahl n die Erreichbarkeit von 0 mit zwei der Rechenoperationen nachzuweisen. Ein solches Beispiel ist etwa n = 100000 wegen

$$100000:500 = 200,\quad 200-200 = 0.$$

b) Nach Voraussetzung sei n eine natürliche Zahl mit

$$100000 \leqq n \leqq 999000. \qquad (1)$$

Für die ganze Zahl g mit $g < \frac{n}{999} \leqq g+1$ gilt

$$999\cdot g < n \leqq 999\cdot g + 999. \qquad (2)$$

Hieraus und aus (1) folgt $999 \cdot g + 999 \geqq n \geqq 100000 > 999$ und $999 \cdot g < n \leqq 999000$, also $g > 0$ und $g < 1000$, also ist g eine höchstens dreistellige natürliche Zahl.

Aus (2) folgt ferner

$$0 < n - 999 \cdot g \leqq 999,$$

also ist auch $n - 999 \cdot g$ eine höchstens dreistellige natürliche Zahl. Mit diesen Zahlen führen daher die drei Rechenoperationen

$$n - (n - 999 \cdot g) = 999 \cdot g,$$
$$999 \cdot g : 999 = g,$$
$$g - g = 0$$

in der behaupteten Weise zum Ergebnis 0.

Andere Lösungswege ergeben sich z. B., indem man jeweils zu n (nicht in der Folge der Vielfachen von 999, sondern) in der Folge

$$316 \cdot 317,\ 317^2,\ 317 \cdot 318,\ 318^2,\ \ldots.\ 998 \cdot 999,\ 999^2$$

einen Nachbar durch Addition oder Subtraktion erreicht, wonach wie oben eine Division und eine Substraktion auf 0 führt. Man kann dies auch als Erreichbarkeit der jeweils zu n nächstgelegenen Quadratzahl formulieren und für $n \leqq 999^2$ mit $a^2 - (a-1)^2 = 2a-1 < 2a$, also damit begründen, daß nicht beide Differenzen a^2-n, $n - (a-1)^2$ größer als a sein können, so daß stets eine der Quadratzahlen $(a-1)^2$, a^2 (mit $a \leqq 999$) durch Addition oder Subtraktion einer höchstens dreistelligen Zahl erreichbar ist. Für $n > 999^2$ ist die Erreichbarkeit von 999^2 aus der zusätzlichen Voraussetzung $n \leqq 999000$ wegen $999000-999^2 = 999$ zu schließen.

290836) Lösung: 8 Punkte

a) Wenn ein Viereck ABCD die Forderungen erfüllt, so folgt:

Es gilt

$\overline{\sphericalangle DAB} = \alpha = 48^\circ$.

Ist ferner E der Schnittpunkt der Geraden durch A,B mit der Parallelen durch C zu BD, so ist das Viereck BECD wegen

$BD \parallel EC$, $AB \parallel DC$

ein Parallelogramm. Daher gilt

$\overline{EC} = \overline{BD} = f = 6$ cm

sowie nach dem Stufenwinkelsatz

$\overline{\sphericalangle ACE} = \overline{\sphericalangle ASB} = \varepsilon = 114^\circ$.

Ferner ist

$\overline{AC} = e = 7$ cm.

Daher kann das Viereck ABCD durch folgende Konstruktion aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen erhalten werden:

b) (1) Man konstruiert ein Dreieck ACE aus $\overline{AC} = 7$ cm, $\overline{\sphericalangle ACE} = 114^\circ$, $\overline{EC} = 6$ cm.

(2) Man konstruiert die Parallele p durch C zu AE.

(3) Man trägt in A an AE nach derjenigen Seite, auf der C liegt, den Winkel der Größe 48° an; sein zweiter Schenkel schneidet p in D.

(4) Man konstruiert die Parallele durch D zu EC; sie schneidet AE in B.

Konstruktionszeichnung: Abbildung L 290833.

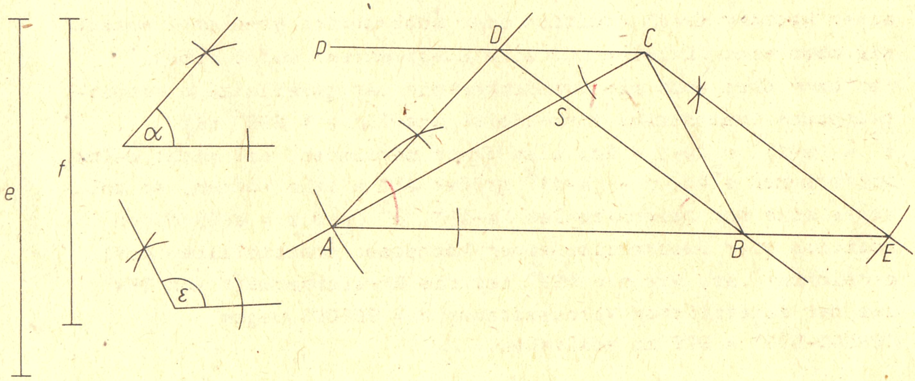

Abb. L 290836

c) Wenn ein Viereck ABCD nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann folgt:

Nach (2) (und (3), (4)) ist AB ∥ DC, nach (1) ist $\overline{AC} = e = 7$ cm, nach (3) (und (4)) ist $\overline{\sphericalangle DAB} = \alpha = 48^\circ$.

Nach (2) und (4) ist ferner BECD ein Parallelogramm, daher und nach (1) folgt $\overline{BD} = \overline{EC} = f = 6$ cm, und nach dem Stufenwinkelsatz sowie (1) folgt, wenn S den Schnittpunkt der in (1) bzw. (4) erhaltenen Strecken AC, BD bezeichnet, auch $\overline{\sphericalangle ASB} = \overline{\sphericalangle ACE} = \varepsilon = 114^\circ$. Also erfüllt jedes so konstruierte Viereck ABCD die gestellten Forderungen.

d) Konstruktionsschritt (1) ergibt nach dem Kongruenzsatz sws ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck ACE.
Die Konstruktionsschritte (2), (3), (4) führen dann auf eindeutig bestimmte Punkte D und B.
Damit (und wegen (a)) ist bewiesen: Durch die Forderungen ist ein Viereck ABCD bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Bemerkungen: In b) kann der Konstruktionsschritt (1) auch ausführlicher in drei Schritten dargestellt werden (Konstruktion einer Strecke AC der Länge e, Antragen eines Winkels der Größe ε in C an AC, Schnitt E seines zweiten Schenkels mit dem Kreis um C mit f); doch wird dies nicht vom Schüler verlangt.
Der Eindeutigkeitsbeweis d) kann auch unabhängig von der Konstruktion formuliert werden; dann sind entsprechende Beweisschritte (z. B. Nachweis der Eindeutigkeit bis auf Kongruenz für ein Dreieck ACE mit wie in a) definierter Ecke E) auszuführen.