XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

290821

Über die Anzahl x der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt:

(1) Die Zahl x ist eine Primzahl.
(2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können schlittschuhlaufen.
(3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können skilaufen.
(4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder schlittschuhlaufen noch skilaufen.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl x eindeutig ermitteln läßt!

290822

a) Untersuche, ob die Gleichung

$$\left(\frac{x}{2} + 2\right)(4x - 7) = 2x^2 + \frac{x}{3} + 1$$

eine natürliche Zahl x als eine Lösung besitzt!

b) In der genannten Gleichung soll die Zahl 7 so durch eine rationale Zahl r ersetzt werden, daß die entstehende Gleichung die Zahl $x=1$ als eine Lösung besitzt.
Ermittle alle diejenigen rationalen Zahlen r, die diese Forderung erfüllen!

290823

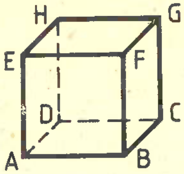

Abb. A 290823

Es sei ABCDEFGH ein Würfel mit beliebiger Kantenlänge (vgl. Abb. A 290823).

a) Ermittle die Größe des Winkels ∢DEB!

b) Beweise, daß die Winkel ∢AHB und ∢BEC zueinander gleiche Größen haben!

290824

1	2	3	1
3	4	2	4
2	4	1	3
1	2	3	4

Abb. A 290824

Das 4x4-Felder-Quadrat in Abbildung A 290824 soll so in vier Teile zerlegt werden, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

(1) Jedes Teil besteht aus genau vier Feldern.

(2) Jedes Teil ist derart zusammenhängend, daß sich je zwei Mittelpunkte seiner Felder durch einen Weg miteinander verbinden lassen, der ganz in dem Teil verläuft und nur aus Strecken besteht, von denen jede zu einer Seitenkante des Quadrates parallel ist.

(3) Jedes Teil enthält alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4.

Gib alle Zerlegungen an, die diese Forderungen erfüllen! Weise nach, daß es keine weiteren derartigen Zerlegungen gibt!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

290821) Lösung: **9 Punkte**

Aus diesen Angaben läßt sich die Schülerzahl x nicht eindeutig ermitteln. Es gibt beispielsweise die folgenden beiden Möglichkeiten:

1. Möglichkeit:

nur schlittschuhlaufen kann	genau 1 Schüler,
nur skilaufen können	genau 4 Schüler,
beide Sportarten beherrschen	genau 8 Schüler,
keine der beiden Sportarten beherrschen	genau 4 Schüler.

In der Tat erfüllt diese Möglichkeit
wegen $1+4+8+4 = 17$ die Aussage (1),
wegen $1+8 = 9$ die Aussage (2),
wegen $4+8 = 12$ die Aussage (3)
sowie wegen der vierten Angabe auch (4).

2. Möglichkeit:

nur schlittschuhlaufen können	genau 3 Schüler,
nur skilaufen können	genau 6 Schüler,
beide Sportarten beherrschen	genau 6 Schüler,
keine der beiden Sportarten beherrschen	genau 4 Schüler.

In der Tat erfüllt diese Möglichkeit
wegen $3+6+6+4 = 19$ die Aussage (1),
wegen $3+6 = 9$ die Aussage (2),
wegen $6+6 = 12$ die Aussage (3),
sowie wegen der vierten Angabe auch (4).

Hinweis: Als Hinführung zur Lösung kann man aus den Angaben (1) bis (4) folgenden Nachweis führen:

(*) Nach (2) und (3) gehören höchstens $9+12$ Schüler nicht zu den in (4) genannten 4 Schülern; also ist $x \leqq 9+12+4$. Nach (3) und (4) können mindestens 12 Schüler skilaufen und mindestens 4 nicht; also ist $x \geqq 12+4$. Aus $16 \quad x \quad 25$ und (1) folgt: x kann nur eine der Zahlen 17, 19, 23 sein.

Allein mit diesem Nachweis ist die Aufgabe jedoch nicht gelöst. Es fehlt der Nachweis, daß die genannten Zahlen x auch durch Verteilungen realisiert werden können, die (1) bis (4) erfüllen. Ein solcher Nachweis wird im obigen Lösungstext gegeben. Dieser reicht auch bereits zur Beantwortung der gestellten Frage. Der Nachweis (∗) ist also sogar überflüssig.

290822) Lösung: 11 Punkte

a) Wenn x eine Lösung der genannten Gleichung ist, dann folgt[1]

$$2x^2 - \frac{7}{2}x + 8x - 14 = 2x^2 + \frac{x}{3} + 1,$$
$$8x - \frac{7}{2}x - \frac{x}{3} = 15,$$
$$48x - 21x - 2x = 90,$$
$$25x = 90,$$
$$5x = 18.$$

Da dies von keiner natürlichen Zahl x erfüllt wird, hat die genannte Gleichung keine natürliche Zahl x als Lösung.

b) Die entstehende Gleichung

$$\left(\frac{x}{2} + 2\right)(4x - r) = 2x^2 + \frac{x}{3} + 1$$

hat genau dann x=1 als eine[2] Lösung, wenn

$$\left(\frac{1}{2} + 2\right)(4 - r) = 2 + \frac{1}{3} + 1 \qquad (1)$$

gilt. Das ist genau dann[3] der Fall, wenn

$$\frac{5}{2} \cdot (4 - r) = \frac{10}{3}$$

oder, der Reihe nach äquivalent hiermit,

$$\frac{1}{2} \cdot (4 - r) = \frac{2}{3},$$
$$3 \cdot (4 - r) = 4,$$
$$12 - 3r = 4,$$
$$3r = 8,$$
$$r = \frac{8}{3} \qquad (2)$$

gilt. Die genannte Forderung wird also genau von der rationalen Zahl $r = \frac{8}{3}$ erfüllt.

---

[1] Man kann auch feststellen, daß die obigen, anschließend angegebenen Gleichungen äquivalent zur ersten sind, daß diese also genau die Lösung $x = \frac{18}{5}$ hat. Dies braucht jedoch zur Erfüllung der Aufgabenstellung a) nicht festgestellt zu werden; es genügt

nachzuweisen, daß keine natürliche Zahl x als Lösung möglich ist.

2 Auch hier kann man feststellen, daß die entstehende Gleichung äquivalent zu $8x - \frac{r}{2}x - \frac{x}{3} = 2r + 1$, $(46 - 3r) = 12r + 6$ ist. Dies ist für $r = \frac{46}{3}$ unlösbar und hat für alle anderen r genau die Lösung $x = \frac{12r + 6}{46 - 3r}$. Die Forderung, daß x = 1 eine Lösung ist, kann also nur so erfüllt werden, daß x = 1 sogar die einzige Lösung ist.
Weiter ist nun $\frac{12r + 6}{46 - 3r} = 1$ genau für $12r + 6 = 46 - 3r$, $15r = 40$, $r = \frac{8}{3}$ erfüllt.
Man erhält hier also (durch höheren Rechenaufwand) dasselbe Ergebnis wie im obigen dargestellten Lösungsweg, mit einer zusätzlichen Feststellung (einer generellen Einzigkeitsaussage zu x=1), die in der Aufgabe nicht erfragt war.

3 Die Äquivalenz von dieser Stelle an bis zum Ende des obigen Lösungsweges ist - im Unterschied zu den vorigen Anmerkungen - für eine korrekte Herleitung erforderlich. Wird also zunächst nur die Schlußrichtung von (1) auf (2) angegeben, so muß auch der umgekehrte Schluß ausgeführt werden (z. B. durch eine Probe, also Einsetzen von $r = \frac{8}{3}$ in (1).

290823) Lösung: 8 Punkte

a) Das Dreieck DBE ist gleichseitig, da DE, BE und BD Flächendiagonalen des Würfels und somit einander gleichlang sind. Der gesuchte Winkel ist Innenwinkel dieses Dreiecks, folglich gilt $\overline{\sphericalangle DEB} = 60^{\circ}$.

b) Die Dreiecke AHB und BEC sind nach dem Kongruenzsatz (sss) zueinander kongruent, da $\overline{BC} = \overline{AB}$ (Kanten des Würfels), $\overline{BE} = \overline{AH}$ (Flächendiagonalen) und $\overline{CE} = \overline{BH}$ (Raumdiagonalen) gilt. In diesen Dreiecken entsprechen die gesuchten Winkel einander, da sie jeweils von einer Flächen- und einer Raumdiagonale eingeschlossen werden. Somit gilt $\overline{\sphericalangle AHB} = \overline{\sphericalangle BEC}$, w.z.b.w.

290824) Lösung: 12 Punkte

a4	b4	c4	d4
a3	b3	c3	d3
a2	b2	c2	d2
a1	b1	c1	d1

Abb. L 290824a

Die Felder seien wie in Abbildung L 290824a bezeichnet. Bei jeder Zerlegung der geforderten Art gilt: Ein Teil muß das Feld a1 enthalten. In diesem Teil muß sich an a1 entweder b1 oder a2 anschließen, da in diesen beiden Feldern dieselbe Zahl 2 steht. Die einzige Möglichkeit für ein Feld mit 3 ist dann c1 bzw. a3, und für ein Feld mit 4 gibt es nur die Möglichkeiten A,B,C,D in den entsprechenden Abbildungen L 290824b A,B,C,D. Von ihnen scheidet D aus, da hierbei ein Teil die Felder a4, b4, c4 mit den Zahlen 1, 2, 3 enthalten müßte und sich daran kein Feld mit 4 anschließen könnte.

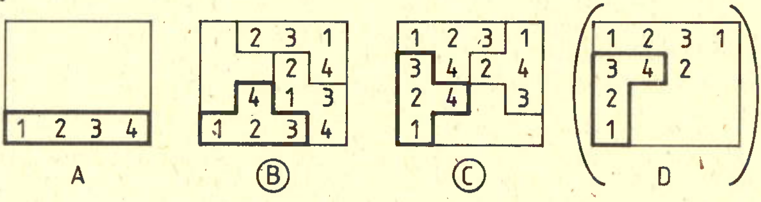

Abb. L 290824b

Im Fall C folgt, daß zwei weitere Teile a4, b4, c4, b3 und d4, d3, d2, c3 lauten müssen, wonach als viertes Teil b1, c1, d1, c2 verbleibt.
Im Fall B folgt, daß zwei weitere Teile d1, d2, c2, c3 und d3, d4, c4, b4 lauten müssen, wonach als viertes Teil a2, a3, a4, b3 verbleibt.

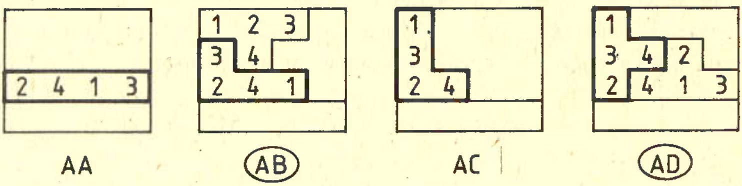

Abb. L 290824c

Im Fall A gilt: Ein Teil muß das Feld a2 enthalten. Die einzigen Möglichkeiten für ein Feld mit 1 in diesem Teil sind c2 und a4. Gehört c2 dazu, so auch b2 mit 4, und für ein Feld mit 3 gibt es nur die Möglichkeiten AA, AB. Gehört aber a4 dazu, so auch a3 mit 3, und für ein Feld mit 4 gibt es nur die Möglichkeiten AC, AD (Abbildungen L 290824c).
Im Fall AD folgt, daß ein Teil b2, c2, d2, c3 lauten muß, wonach b4, c4, d4, d3 verbleibt.

Im Fall AB folgt, daß ein Teil a4, b4, c4, b3 lauten muß, wonach d2, d3, d4, c3 verbleibt.

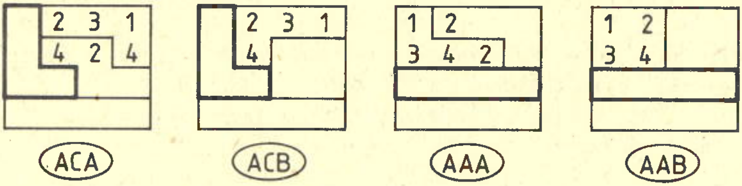

Abb. L 290824d

Im Fall AC muß ein Teil das Feld b3 enthalten, und daran muß sich entweder c3 oder b4 anschließen, da in beiden 2 steht. Schließt sich c3 an, so muß das vierte Teil b4, c4, d4, d3 lauten: ACA. Schließt sich dagegen b4 an, so muß dieses Teil b3, b4, c4, d4 lauten: ACB.

Im Fall AA gehören a4 und b4 entweder zu verschiedenen Teilen oder nicht. Gehören sie zu verschiedenen Teilen, so muß ein Teil a4, a3, b3, c3 lauten: AAA. Gehören sie zum gleichen Teil, so muß als Feld mit 4 darin b3 auftreten, es lautet also a4, b4, b3, a3: AAB (Abbildungen L 290824d).

Damit (und nach Überprüfen der Forderungen auch zu den jeweils übriggebliebenen Teilen) ist bewiesen, daß die Forderungen genau von den acht Zerlegungen B, C, AB, AD, AAA, AAB, ACA, ACB erfüllt werden.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 8 Gesamtpunktzahl: 40

290821

Für den Mehrdeutigkeitsnachweis ausreichende Angaben

(z. B. zwei verschiedene Verteilungen) 5

Ausführung des Nachweises (z. B. Bestätigung der Forderungen für beide Verteilungen) 4

9

Anmerkung: Werden nur die Möglichkeiten 17, 19, 23 genannt (auch hergeleitet), so verbleiben insgesamt höchstens (von den ersten 5 herrührenden) 3 Punkte

290822

a) Rechenweg bis zu einer für die Antwort ausreichenden Gleichung (z. B. 5x=18) 4

Gewinnung der verneinenden Antwort 1

b) Rechenweg bis zum Ergebnis r = 8/3 4

Richtig berücksichtigter logischer Zusammenhang mit der Eigenschaft der Ausgangsgleichung, x=1 als Lösung zu haben 2

11

290823

Ermittlung a) 4

Beweis b) 4

8

290824

Gewinnung der Zerlegungen: Bei zwei Zerlegungen mit Berücksichtigung der Korrektheit des Vorgehens: maximal je 3 Punkte ... 6

Restliche Zerlegungen 6

12

Anmerkung: Bei fehlendem (auch nicht durch systematische Reihenfolge teilweise ausgewiesenem) Vollständigkeitsnachweis maximal insgesamt 6 Punkte (je Zerlegung nur maximal 1 Punkt)