XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

290731

28 Schüler einer Klasse beteiligten sich an einem Sportfest; dabei nahm jeder dieser Schüler an mindestens einer der Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100 m-Lauf teil. Außerdem ist über die Schüler dieser Klasse bekannt:

(1) Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen, ist größer als 1, und sie ist gleich der Anzahl derer, die sich nur am Kugelstoßen beteiligten.

(2) Mindestens einer der Schüler nahm an allen drei Disziplinen teil; fünfmal so groß wie die Anzahl dieser Schüler ist insgesamt die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten.

(3) Genau 6 der Schüler starteten in den Disziplinen Kugelstoßen und 100 m-Lauf und nahmen nicht am Weitsprung teil.

(4) Kein Teilnehmer trat nur im Weitsprung oder nur im 100 m-Lauf an.

Untersuche, ob aus diesen Angaben für jede der drei Disziplinen die Anzahl derjenigen in diese Klasse gehenden Schüler eindeutig ermittelt werden kann, die an der betreffenden Disziplin teilnahmen! Ist das der Fall, dann gib diese drei Anzahlen an!

A 7;I

290732

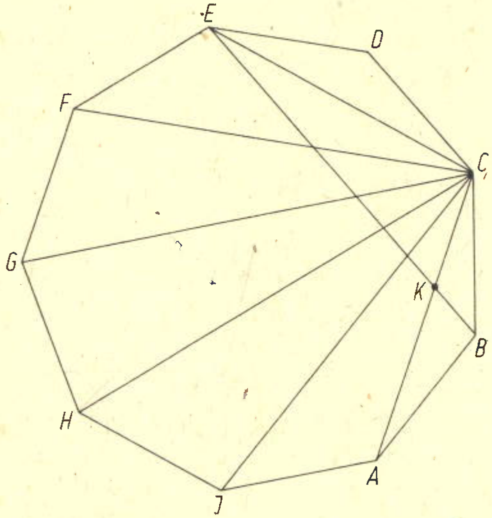


Abb. A 290732

Die Abbildung A 290732 zeigt ein regelmäßiges Neuneck ABCDEFGHI und einige seiner Diagonalen.

a) Ermittle die Anzahl aller Diagonalen dieses Neunecks!

b) Ermittle die Größe eines Innenwinkels dieses Neunecks!

c) Es sei K der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle$ CKE!

Hinweis: Ein Neuneck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten dieselbe Länge und alle seine Innenwinkel dieselbe Größe haben.

290733

Von einem Dreieck ABC wird gefordert, daß $a = 5{,}0$ cm, $s_a = 6{,}0$ cm und $h_c = 4{,}3$ cm gilt, wobei a die Länge der Seite BC, s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC und h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe des Dreiecks ist.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen 5,0 cm, 6,0 cm und 4,3 cm konstruiert werden!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Dreieck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Stelle fest, ob durch die Forderungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik.
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

290734

Ermittle alle diejenigen Paare $(z_1; z_2)$ aus zweistelligen natürlichen Zahlen z_1 und z_2, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $z_1 > z_2$.
(2) Die Differenz der Zahlen z_1 und z_2 beträgt 59.
(3) Die Differenz, die entsteht, wenn man von der Quersumme der Zahl z_1 die Quersumme der Zahl z_2 subtrahiert, beträgt 14.

290735

Wir betrachten das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000. Ermittle die Anzahl der Nullen, mit denen dieses Produkt endet!

290736

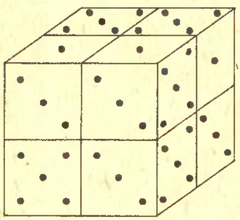


Abb. A 290736

Ein Würfel wurde aus acht gleichgroßen Spielwürfeln zusammengesetzt. Jeder Spielwürfel hat auf seinen sechs Seitenflächen die Augenzahlen 1 bis 6, jede auf genau einer Seitenfläche; dabei haben die drei Seitenflächen mit den geraden Augenzahlen 2, 4, 6 eine Ecke gemeinsam, und dasselbe gilt für die drei Seitenflächen mit den ungeraden Seitenzahlen 1, 3, 5.

Von dem zusammengesetzten Würfel sind drei Seitenflächen sichtbar, wie Abbildung A 290736 zeigt. Alle sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe beträgt 40.

a) Zeichne von einem Würfel, der ebenso aus acht Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei dem aber andere sichtbare Augenzahlen vorkommen, ein Schrägbild (Kantenlänge eines Spielwürfels 2 cm, $\alpha = 45^\circ$, $q = 0{,}5$)! Trage sichtbare Augenzahlen so ein, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt!

b) Beweise, daß in jeder Eintragung, die die in (a) gestellten Forderungen erfüllt, mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen 1 lauten müssen!

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

<u>290731) Lösung:</u> <u>5 Punkte</u>

Die Anzahl der Schüler, die nur am Kugelstoßen beteiligt waren, sei x; nach (1) gilt

$$x \geqq 2. \qquad (5)$$

Die Anzahl der Schüler, die an allen drei Disziplinen teilnahmen, sei y; nach (2) gilt

$$y \geqq 1. \qquad (6)$$

Nach (1) ist x auch die Anzahl der Schüler, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen. Nach (2) ist 5y die Anzahl der Schüler, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten. Hiernach und nach (3), (4) ist 2x + 5y + 6 die Anzahl aller aus der Klasse am Sportfest teilnehmenden Schüler (siehe auch das Mengendiagramm Abb. L 290731); d. h., es gilt

$$2x + 5y + 6 = 28. \qquad (7)$$

Aus (5) und (7) folgt

$$5y \leqq 28 - 4 - 6,$$
$$y \leqq 3. \qquad (8)$$

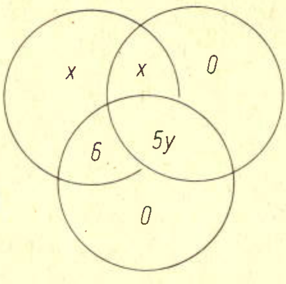
Nach (7) ist y eine gerade Zahl; hieraus und aus (6), (8) folgt

$$y = 2.$$

Damit ergibt sich aus (7)

$$2x = 28 - 10 - 6,$$
$$x = 6,$$

Kugelstoßen Weitsprung



100 m-Lauf

Abb. L 290731

und es ist gezeigt, daß aus den Angaben eindeutig die nachstehenden Anzahlen ermittelt werden können:

Am Kugelstoßen beteiligten sich genau 2x + y + 6 = 20 Schüler,
am Weitsprung beteiligten sich genau x + 0 + 5y = 16 Schüler,
am 100 m-Lauf beteiligten sich genau 6 + 5y + 0 = 16 Schüler.

290732) Lösung: 7 Punkte

a) Von jeder Ecke des Neunecks gehen genau sechs Diagonalen aus. Addiert man diese (für jede der neun Ecken gebildeten) Anzahlen 6, so hat man in dem entstehenden Ergebnis $9 \cdot 6 = 54$ jede Diagonale genau zweimal erfaßt. Also beträgt die Anzahl aller Diagonalen des Neunecks 27.

b) Durch die sechs von einer Ecke ausgehenden Diagonalen wird das Neuneck in genau sieben Dreiecke zerlegt. In jedem dieser Dreiecke beträgt die Summe seiner Innenwinkel 180°. Addiert man alle Innenwinkel in diesen Dreiecken, so ergibt sich die Summe aller Innenwinkel des Neunecks; diese Summe beträgt folglich $7 \cdot 180^\circ$. Da alle neun Innenwinkel des Neunecks dieselbe Größe haben, hat jeder dieser Innenwinkel die Größe $\frac{7 \cdot 180^\circ}{9} = 140^\circ$.

c)

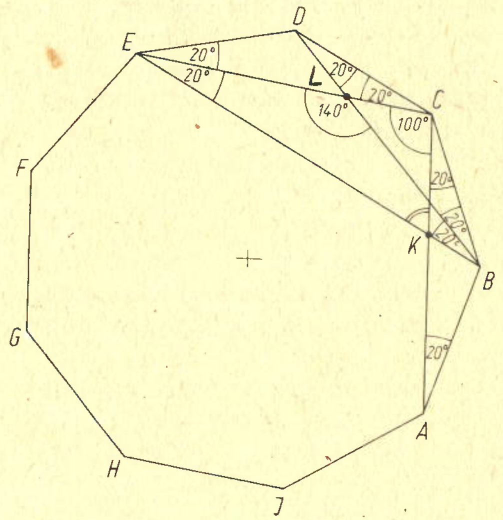


Abb. L 290732

Aus

$$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle BCD} = \overline{\sphericalangle CDE} = 140^\circ \qquad (1)$$

und

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$$

folgt nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle ACB} = \overline{\sphericalangle DBC} = \overline{\sphericalangle BDC} = \overline{\sphericalangle ECD} = \overline{\sphericalangle CED} = 20^\circ \qquad (2)$$

sowie nach dem Kongruenzsatz sws

$$\triangle BCD \cong \triangle CDE,$$

also

$$\overline{BD} = \overline{CE}. \qquad (3)$$

Ist L der Schnittpunkt von BD mit CE, so folgt ferner aus (2) nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes

$$\overline{CL} = \overline{DL}.$$

Hieraus und aus (3) ergibt sich

$$\overline{BL} = \overline{EL}. \qquad (4)$$

Nach dem Scheitelwinkelsatz und dem Innenwinkelsatz sowie wegen (2) ist

$$\overline{\sphericalangle BLE} = \overline{\sphericalangle CLD} = 180^\circ - 2\cdot 20^\circ = 140^\circ.$$

Hieraus und aus (4) folgt nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle BEL} = \overline{\sphericalangle EBL} = 20^\circ. \qquad (5)$$

Aus (1) und (2) folgt ferner

$$\overline{\sphericalangle KCE} = 140^\circ - 2\cdot 20^\circ = 100^\circ;$$

daraus und aus (5) ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz die gesuchte Winkelgröße

$$\overline{\sphericalangle CKE} = 180^\circ - 100^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$

<u>Bemerkungen:</u> Man kann auch als (z. B. aus Arbeitsgemeinschaften) bekannten Sachverhalt verwenden, daß A, B, ..., I auf einem Kreis liegen, und Sätze über Winkel (Zentriwinkel, Peripheriewinkel, Innenwinkel von Sehnenvierecken) anwenden.

Zu (a) kann die Anzahl 27 auch durch Aufzählen aller Diagonalen begründet werden, wenn die Darstellung (z. B. in der Systematik) erkennen läßt, daß jede Diagonale genau einmal erfaßt wurde. Andererseits kann auch, z. B. als bekannter Sachverhalt zitiert, die Formel $\frac{1}{2}\, n \cdot (n-1)$ für die größtmögliche Anzahl aller Verbindungsstrecken für n Punkte herangezogen werden.

290733) Lösung: **8 Punkte**

a) Wenn ein Dreieck die Forderungen erfüllt, so folgt:
Ist H der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe, so ist $\overline{CH} = h_c = 4{,}3$ cm, und die Gerade durch A und B steht auf CH senkrecht und geht durch H.
Ferner ist $\overline{BC} = a = 5{,}0$ cm, also liegt B auf dem Kreis um C mit dem Radius 5,0 cm.
Ist M der Mittelpunkt der Strecke BC, so ist $\overline{AM} = s_a = 6{,}0$ cm, also liegt A auf dem Kreis um M mit dem Radius 6,0 cm; ferner liegt A auf der Geraden durch A und B.
Damit ist bewiesen, daß das Dreieck durch folgende Konstruktion aus den gegebenen Längen erhalten werden kann:

b) (1) Man konstruiert eine Strecke CH der Länge 4,3 cm.
(2) Man errichtet die Senkrechte g in H auf CH.
(3) Man konstruiert den Kreis k_1 um C mit dem Radius 5,0 cm. Er schneidet[1] die Gerade g in zwei Punkten; man wählt einen beliebigen von ihnen aus und bezeichnet ihn mit B.
(4) Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke BC.
(5) Man konstruiert den Kreis k_2 um M mit dem Radius 6,0 cm. Er schneidet[2] die Gerade g in zwei Punkten A_1, A_2; einen von ihnen wählt man als A.
Konstruktionszeichnung: Abbildung L 290733.

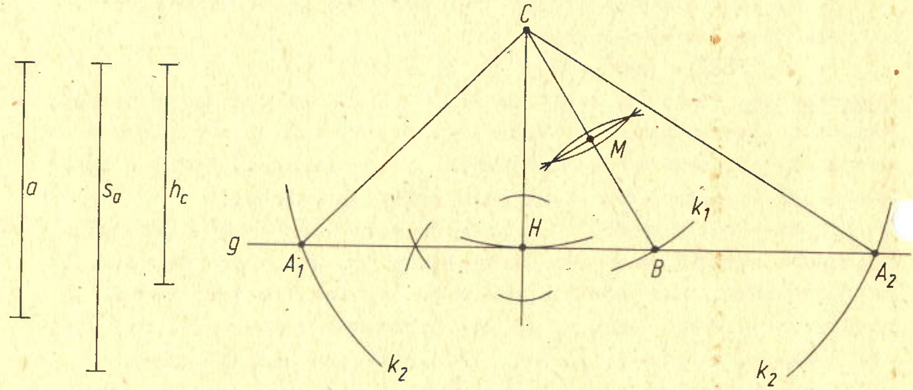


Abb. L 290733

c) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann folgt:

Nach (3) ist $\overline{CB} = a = 5{,}0$ cm. Nach (2) und (5) stehen CH und die Gerade durch A und B senkrecht aufeinander, also ist CH die auf AB senkrechte Höhe; nach (1) hat sie die Länge $\overline{CH} = h_c = 4{,}3$ cm. Nach (4) und (5) ist (für jede Wahlmöglichkeit von A_1 oder A_2 als A) AM die Seitenhalbierende der Seite BC; nach (5) hat sie die Länge $\overline{AM} = s_a = 6{,}0$ cm.

Also erfüllt jedes so konstruierte Dreieck ABC die gestellten Forderungen.

d) Für die in (1), (3), (5) erhaltenen Punkte B, A_1, A_2, H gilt[3]: B liegt zwischen A_1 und A_2, und es ist $B \neq H$. Daher haben die beiden Dreiecke A_1BC, A_2BC bei B Innenwinkel, die Nebenwinkel voneinander und verschieden von 90° sind. Also ist $\overline{\sphericalangle A_1BC} \neq \overline{\sphericalangle A_2BC}$. Daher sind die Dreiecke A_1BC und A_2BC nicht zueinander kongruent[4]. Damit ist bewiesen: Durch die Forderungen ist ein Dreieck ABC nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

<u>Bemerkung:</u> In b) kann man z. B. auch statt (1), (2), (3) einen zusammenfassenden Konstruktionsschritt formulieren: Konstruktion eines Dreiecks BCH mit $\overline{CH} = 4{,}3$ cm, $\overline{\sphericalangle CHB} = 90^\circ$, $\overline{BC} = 5{,}0$ cm (entsprechend dem Kongruenzsatz sSW).

1,2 Dies kann der ausgeführten Konstruktion entnommen werden. Man kann auch [1] aus $a > h_c$, [2] aus $s_a > \frac{1}{2}h_c$ beweisen.

3 Dies kann der ausgeführten Konstruktion entnommen oder auch aus $s_a > \frac{1}{2}a$ und $a > h_c$ bewiesen werden.

4 Der obige Beweis liefert die Inkongruenz bei Auffassung von A_1, B, C und A_2, B, C als zugeordnete Punkte in dieser Reihenfolge. Die Dreiecke A_1BC, A_2BC sind aber auch bei anderer Zuordnung ihrer Eckpunkte nicht zueinander kongruent, da (bei Wahl der Bezeichnungen A_1, A_2 wie in Abb. L 290733) $\overline{\sphericalangle A_2BC} > \overline{\sphericalangle BCA_1}$ und $\overline{\sphericalangle A_2BC} > \overline{\sphericalangle CA_1B}$ gilt. Diese Aussagen werden nicht vom Schüler verlangt.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

290734) Lösung: **7 Punkte**

I. Wenn ein Paar $(z_1; z_2)$ zweistelliger natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, dann folgt:
Sind a,b in dieser Reihenfolge die Ziffern von z_1 und c,d die von z_2, so ist

$$z_1 = 10a+b,\ z_2 = 10c+d,\ 1 \leqq a \leqq 9,\ 1 \leqq c \leqq 9,\ 0 \leqq b \leqq 9,\ 0 \leqq d \leqq 9,$$

und aus (1), (2) und (3) folgt

$$10a + b - 10c - d = 59, \quad (4)$$

$$a + b - c - d = 14. \quad (5)$$

Subtrahiert man (5) von (4), so folgt

$$9a - 9c = 45,$$

$$a - c = 5; \quad (6)$$

hieraus und aus (5) folgt

$$b - d = 9. \quad (7)$$

Wegen $b \leqq 9$, $d \geqq 0$ ist (7) nur mit

$$b = 9,\quad d = 0 \quad (8)$$

möglich. Wegen $c \geqq 1$ und (6) ist $a \geqq 6$; hiernach und wegen (6) verbleiben für a und c nur die Möglichkeiten

$$\left.\begin{array}{ll} a = 6, & c = 1; \\ a = 7, & c = 2; \\ a = 8, & c = 3; \\ a = 9, & c = 4. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Mit (8) und (9) ist gezeigt, daß nur die Paare

$$(z_1;z_2) = (69;10),\quad (79;20),\quad (89;30),\quad (99;40) \quad (10)$$

die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen, wie aus
$69 > 10,\quad 79 > 20,\quad 89 > 30,\quad 99 > 40,$
$69 - 10 = 79 - 20 = 89 - 30 = 99 - 40 = 59,$
$(6+9) - (1+0) = (7+9) - (2+0) = (8+9) - (3+0) = (9+9)-(4+0)=14$
ersichtlich ist.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau die in (10) genannten Paare die geforderten Bedingungen erfüllen.

Hinweis: Möglich sind auch andere Lösungswege, z. B. auch solche mit größerem Anteil systematischen Probierens.

30 11 19-1

290735) Lösung: 6 Punkte

Die Anzahl der Nullen am Ende einer Zahl gibt an, wie oft in ihr der Faktor $10 = 2 \cdot 5$ enthalten ist. In dem betrachteten Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$$

ist der Faktor 2 in einer höheren Potenz enthalten als der Faktor 5. Deshalb endet dieses Produkt auf so viele Nullen wie die Anzahl der in diesem Produkt vorkommenden Faktoren 5.

Unter den Zahlen von 1 bis 1000 gibt es genau $1000:5 = 200$ Vielfache von 5. Von diesen sind genau $1000:25 = 40$ durch 25 teilbar, enthalten also je zwei Faktoren 5. Ferner enthalten genau $1000:125 = 8$ davon je drei Faktoren 5, und genau eine Zahl (nämlich 625) enthält sogar vier Faktoren 5.

Deshalb enthält das genannte Produkt genau

$$200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

Faktoren 5 und endet daher auf genau 249 Nullen.

290736) Lösung: 7 Punkte

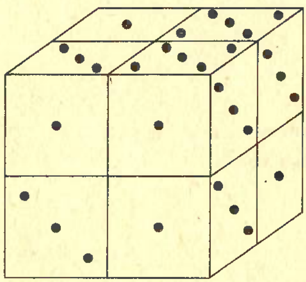


Abb. L 290736

a) Schrägbild und ein Beispiel für eine Eintragung der geforderten Art: Abbildung L 290736.

b) Wenn in einer Eintragung alle zwölf sichtbaren Augenzahlen ungerade sind, dann sind auf demjenigen Spielwürfel, von dem drei Augenzahlen sichtbar sind, dies die Augenzahlen 1, 3 und 5.

Haben ferner von den übrigen sichtbaren Augenzahlen höchstens zwei den Wert 1, so haben mindestens sieben von ihnen einen Wert größer oder gleich 3; also beträgt die Summe der sichtbaren Augenzahlen dann mindestens

$$1+3+5 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 32.$$

Wenn in einer Eintragung alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und die Summe 30 haben, so müssen folglich außer der 1 auf dem Spielwürfel mit drei sichtbaren Augenzahlen noch mindestens drei weitere sichtbare Augenzahlen 1 lauten.