XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 6

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

290621

Jana will an der Wandzeitung über Christians, Alexanders und Martins Erfolge in der außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten. Sie befragt die drei Schüler und notiert sich folgendes:

(1) Alle drei Schüler nahmen an der Mathematikolympiade teil. Einer dieser Schüler errang einen ersten Preis, ein weiterer von ihnen einen zweiten Preis und der restliche Schüler einen dritten Preis.

(2) Martin und der Gewinner des zweiten Preises betreiben gern Leichtathletik. Beide erkämpften beim letzten Sportfest je eine Silbermedaille.

(3) Im Wettbewerb der Jungen Rezitatoren schnitt der Gewinner des zweiten Preises bei der Mathematikolympiade besser als Christian ab.

(4) Der Gewinner des ersten Preises bei der Mathematikolympiade spielt in seiner Freizeit gern Schach; sein häufigster Gegner dabei ist Martin.

Als Jana ihre Notizen durchliest, stellt sie fest, daß sie gar nicht aufgeschrieben hat, welcher der drei Schüler welchen der drei Preise bei der Mathematikolympiade errang.
Stelle fest, ob sich das trotzdem aus den Notizen von Jana eindeutig ermitteln läßt! Wenn dies der Fall ist, so gib die Verteilung der drei Preise an!

A 6

290622

a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte A(2;3), B(6;1), C(6;5) und D(4;6) ein! Verbinde die Punkte A, B, C und D so miteinander, daß ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt A mit dem Punkt C und den Punkt B mit D! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken AC und BD mit E!

b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch C und D! Verbinde anschließend noch den Punkt A mit seinem Bildpunkt A' und den Punkt B mit seinem Bildpunkt B'!

c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecken so durchlaufen werden, daß jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt. Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

290623

Die Abbildung A 290623 zeigt ein Quadrat, das sich aus neun Feldern zusammensetzt. Die Seitenlänge jedes einzelnen Feldes sei 1 cm.

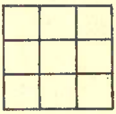

Abb. A 290623

a) Ermittle die Anzahl aller derjenigen Rechtecke, die aus solchen Feldern bestehen!

b) Ermittle die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke!

290624

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Abb. A 290624a

a) In ein 3x3-Quadrat sollen die Zahlen 1 bis 9 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt.

Die Abbildung A 290624a zeigt dafür ein Beispiel.

Gib eine weitere Eintragung der geforderten Art an!

A 6

b) Als in der Mathematik-AG über solche Aufgaben gesprochen wurde, versuchte Peter, eine Aufgabe mit sechseckigen Feldern zu stellen. Er wählt die Figur in Abbildung A 290624b und stellt die Aufgabe: In die sieben Felder sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder der neun gekennzeichneten Linien die gleiche Summe ergibt.

Gibt es eine derartige Eintragung? Wenn das der Fall ist, gib ein Beispiel an! Wenn es unmöglich ist, eine solche Eintragung zu bilden, begründe das!

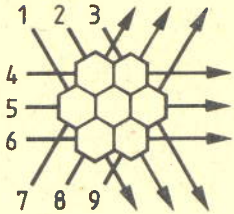

Abb. A 290624b

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

290621) Lösung: 8 Punkte

Aus den Notizen folgt: Nach (2) sind Martin und der Gewinner des zweiten Preises zwei Schüler, d.h., Martin gewann nicht den zweiten Preis. Nach (3) gewann auch Christian nicht den zweiten Preis. Also folgt aus (1):

(5) Den zweiten Preis gewann Alexander.

Nach (4) ist Martin nicht der Gewinner des ersten Preises. Hieraus und aus (5), (1) folgt:

(6) Den ersten Preis gewann Christian,

(7) den dritten Preis gewann Martin.

Damit ist gezeigt, daß sich diese Verteilung (5), (6), (7) eindeutig aus Janas Notizen ermitteln läßt.

Bemerkung: Eine Probe (Nachweis, daß die Verteilung (5), (6), (7) die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt) ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da man die Existenz einer Verteilung, die diese Bedingungen erfüllt, dem Aufgabentext entnehmen kann.

290622) Lösung: **10 Punkte**

a) und b):

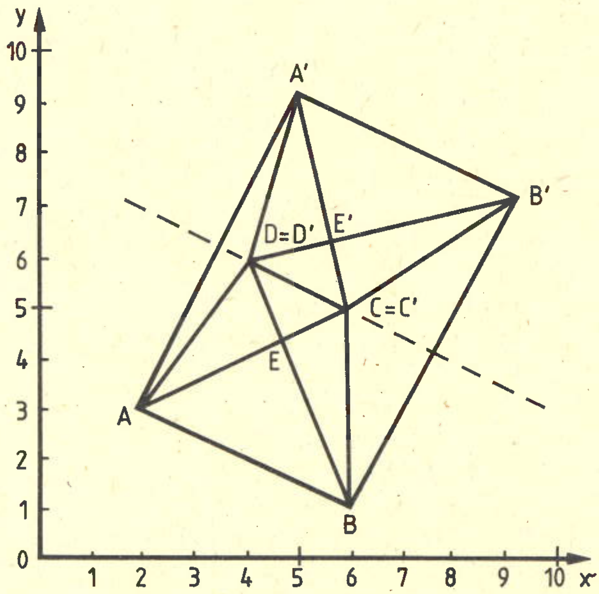

Abb. L 290622

c) Ein möglicher Weg ist:
D,A,B,E,D,C,E,A,A',D,E',B',C,E',A',B',B,C
(Dieser Weg kann z. B. auch so beschrieben werden:
D,A,B,D,C,A,A',D,B',C,A',B',B,C.
Wegen C=C' und D=D' kann ferner in einer Beschreibung wahlweise C' bzw. D' statt C bzw. D stehen.)

290623) Lösung: **10 Punkte**

Für jede mögliche Größe von Rechtecken der genannten Art erhält man die in der folgenden Tabelle aufgeführten Angaben:

L 6

Rechtecke	Flächeninhalt	Anzahl der Rechtecke	Summe der Flächeninhalte
1 cm • 1 cm	1 cm^2	9	9 cm^2
1 cm • 2 cm	2 cm^2	12	24 cm^2
1 cm • 3 cm	3 cm^2	6	18 cm^2
2 cm • 2 cm	4 cm^2	4	16 cm^2
2 cm • 3 cm	6 cm^2	4	24 cm^2
3 cm • 3 cm	9 cm^2	1	9 cm^2
		36	100 cm^2

Damit hat sich ergeben:

a) Die Anzahl der genannten Rechtecke beträgt 36.

b) Die Summe ihrer Flächeninhalte beträgt 100 cm^2.

<u>290624) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Abb. L. 290624a

a) Ein Beispiel zeigt Abbildung L 290624a

b) Es gibt keine derartige Eintragung.

1. Beweismöglichkeit: Da es drei der gekennzeichneten Linien gibt, die die gesamte Figur überdecken, ohne ein Feld mehrmals zu erfassen, müßte bei einer Eintragung der geforderten Art das Dreifache der in jeder Linie zu erreichenden Summe gleich 28 sein; denn es gilt $1+2+...+7 = 28$. Da aber 28 nicht durch 3 teilbar ist, ist das nicht möglich.

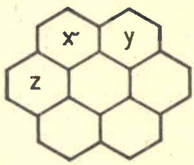

Abb. L. 290624b

2. Beweismöglichkeit: Bei einer Eintragung der geforderten Art müßte beispielsweise $x+y = x+z$ für die in Abbildung L 290624b angegebenen Zahlen x, y, z gelten. Das hätte aber $y = z$ zur Folge, im Widerspruch zu den Forderungen der Aufgabe.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 6 Gesamtpunktzahl: 40

290621

Ermittlung der Zuordnung eines Preises	4
Ermittlung der Zuordnung eines weiteren Preises	2
Ermittlung der Zuordnung des letzten Preises	2
	8

290622

Zeichnung a) (Genauigkeit: alle Abweichungen unter 2 mm)	2
Zeichnung b) (Genauigkeit: alle Abweichungen unter 2 mm)	3
c) Beschreibung eines Weges, zur eindeutigen Festlegung ausreichend	2
Erfüllung aller Forderungen durch den angegebenen Weg	3
	10

290623

a) Aus der Darstellung ersichtliche Wahl eines Vorgehens zur Sicherung der Vollständigkeit der erfaßten Rechtecke	3
Ausführung des Vorgehens, Anzahlermittlung	3
b) Flächenberechnung, Summation	4
	10

290624

a) Korrekte Eintragung	3
b) Beweismotiv (z. B. Teilbarkeit; unzulässige Gleichheit) ..	5
Durchführung (z. B. Schlußweise bis zum Widerspruch)	4
	12