

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 5

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

290521) Lösung:

8 Punkte

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4

Abbildung L 290521 zeigt alle geforderten Eintragungen.

Abb. L 290521

290522) Lösung:

10 Punkte

Wenn x die Anzahl der roten Würfel ist, dann ist nach Susannes Feststellungen $2x-1$ die Anzahl der blauen Würfel und $3x+1$ die Anzahl der roten Würfel. Die Summe der drei Anzahlen ist 18, also folgt

$$\begin{aligned}x + 2x - 1 + 3x + 1 &= 18, \\6x &= 18, \\x &= 3.\end{aligned}$$

Daraus folgt weiter

$$2x - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$\text{und } 3x + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10.$$

Also können Susannes Feststellungen nur wahr sein, wenn die Anzahl der roten Würfel 3, die Anzahl der blauen Würfel 5 und die Anzahl der gelben Würfel 10 beträgt.

Hinweise zu anderen Lösungsmöglichkeiten und zur Korrektur:

1. Man kann auch eine andere oder mehr als eine Variable einführen, z. B. außer x auch y , z für die Anzahlen der blauen bzw. gelben Würfel, und dann z. B. $y = 2x-1$ und $z = 3x+1$ in die Gleichung $x+y+z = 18$ einsetzen.
2. Statt derartiger als Gleichung geschriebener Aussagen können auch verbale Formulierungen verwendet werden, z. B.: Addiert man zur Anzahl der roten Würfel das Doppelte und das Dreifache dieser Anzahl, so hat man die Summe aus der Anzahl der roten Würfel, der um 1 verringerten Anzahl der blauen Würfel

L 5

und der um 1 vermehrte Anzahl der gelben Würfel gebildet. Das führt aber zum gleichen Ergebnis, als hätte man die drei Anzahlen selbst addiert, also zum Ergebnis 18. Daher muß die sechsfache Anzahl der roten Würfel 18 betragen usw.

3. Man kann auch Probiervorgehen ansetzen, z. B. in Tabellenform

Anzahl der roten Würfel	1	2	3	> 3
Anzahl der blauen Würfel	1	3	5	> 5
Anzahl der gelben Würfel	4	7	10	> 10
Summe	6	12	18	> 18

Fehlt die letzte Spalte oder eine gleichwertige Aussage, so ist die Aufgabenstellung (Nachweis der Einzigkeit) nicht erfüllt. Dasselbe gilt, wenn überhaupt nur die Anzahlen 3, 5, 10 angegeben werden; auch wenn zusätzlich eine Probe (in Gleichungs- oder Textform) zu diesen Anzahlen erfolgt.

4. Eine Probe, d.h. die Aussage, daß wegen $3+5+10 = 18$, $2 \cdot 3 - 1 = 5$ und $3 \cdot 3 + 1 = 10$ alle Bedingungen des Aufgabentextes von den angegebenen Anzahlen 3, 5, 10 erfüllt werden, ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Realisierbarkeit dieser Bedingungen nicht erfragt war (und auch dem Aufgabentext entnommen werden kann).

290523) Lösung:

10 Punkte

Wenn eine Zahl z die Bedingungen erfüllt, so muß sie vierstellig sein; denn hätte sie mehr Stellen, so erst recht $z+z'$; hätte sie aber 3 oder weniger Stellen, so könnte $z+z'$ höchstens mit der Anfangsziffer 1 vierstellig sein. Sind nun a, b, c, d die Ziffern von z , so folgt aus (1), daß

$$c=0$$

ist, und wegen (2) wird das Kryptogramm

$$ab0d$$

$$+ \quad abd$$

$$5174$$

erfüllt.

An der Einerstelle ist ersichtlich, daß $2d = 4$ oder $2d = 14$ gilt.

Im Fall $2d = 4$, also

$$d = 2,$$

folgt für die Zehnerstelle

$$b = 7,$$

und an der Hunderterstelle kann wegen $7+a = 11$ nur

$$a = 4$$

stehen.

Im Fall $2d = 14$, also $d = 7$, folgte für die Zehnerstelle $b = 6$, für die Hunderterstelle wegen $6+a = 11$ also $a = 5$, und wegen des

L 5

Übertrage ergäbe sich in der Tausenderstelle der Summe nicht 5, sondern 6.

Also scheidet der Fall $2d = 14$ aus.

Daher können die Bedingungen nur von der Zahl $z = 4702$ erfüllt werden.

Die Überprüfung

$$\begin{array}{r} 4702 \\ + 472 \\ \hline 5174 \end{array}$$

zeigt, daß diese Zahl die Bedingungen erfüllt.

290524) Lösung:

12 Punkte

8				20		7		
7			14		6		1	
6		9		5		1		
5	5		4		1		0	
4	2		3		1		0	
3		2		1		0		
2	1		1		0		0	
1		1		0		0		
	a	b	c	d	e	f	g	h

Die gesuchten Anzahlen lassen sich ermitteln, indem man in jedes (weiße) Feld die Anzahl aller derjenigen Wege einträgt, auf denen dieses Feld von b_1 aus erreichbar ist, und dabei der Reihe nach die Felder der Zeilen 1, 2, ..., 8 abarbeitet. (Wie man feststellen kann, genügt es, nur die in Abb. L 290524 eingetragenen Zahlen zu berücksichtigen.)

Abb. L 290524

Das Feld b_1 erhält die Anzahl 1, die anderen Felder der Zeile 1 die Anzahl

0. In jedes weitere Feld wird die Summe der (höchsten zwei) Anzahlen eingetragen, die schräg unter diesem Feld liegen; denn genau aus solchen Feldern führen alle Wege auf das betrachtete Feld. So kommt man zu den Eintragungen in Abbildung L 290524 und damit zu den Angaben:

- Von b_1 nach g_8 führen genau 7 Wege.
- Von b_1 nach e_8 führen genau 20 Wege.

Bemerkung: Man kann auch die Wege selbst angeben (um sie anschließend abzuzählen). Es muß dann aus der Darstellung des Lösungstextes hervorgehen, wie sie gefunden wurden (insbesondere, wie die Vollständigkeit und Wiederholungsfreiheit ihrer Aufzählung gesichert wurde); d.h., daß berücksichtigt wurde, welche Fortsetzungen von einem Feld aus jeweils insgesamt möglich sind.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 5 Gesamtpunktzahl: 40

290521

Erste Eintragung	4
Zweite Eintragung	<u>4</u>
	8

290522

Angabe eines (ersten) wesentlichen Ermittlungsschrittes (z. B.: Schlußfolgerung aus einer von Susannes Feststellungen; Aussagen über eine eingeführte Variable; Anlegen einer Tabelle o.ä.)	4
Weitere Durchführung der Ermittlung (z. B. bis zur Ermittlung der ersten Anzahl bzw. Fertigstellung der Tabelle)	4
Abschließende Ermittlung der Anzahlen	<u>2</u>
	10

Anmerkung: Werden nur die Anzahlen genannt, u. U. mit Probe,
so verbleiben von dieser Aufteilung: Maximal die letzten 2
Punkte für die Anzahlen; von den übrigen maximal 3 für die Probe
(als rechnerischer Teil einer Ermittlung)

290523

Angabe erster wesentlicher Ermittlungsschritte (z. B.: Vierstelligkeit, Variable für Ziffern, Kryptogramm)	4
Weitere Schritte zur Ermittlung von z (und zum Aus- schließen unmöglicher Fälle)	4
Oberprüfung	<u>2</u>
	10

290524

I. Bei weitgehend zusammengefaßter oder parallellaufender Behandlung von a), b): Anlage und begründende Darstellung des Verfahrens (z. B.: Verfahren der Wegezahlen in Zwischenfeldern; Ermittlung der einzelnen Wege selbst), aufgeteilt z. B. in: Beschreibende (aus der Darstellung ersichtl.) Anteile ..	4
Begründende Anteile	3
Rechnerisch richtige Durchführung des Verfahrens.....	5
II. Bei getrennter Behandlung von a), b):	
Lösung von a)	5
Lösung von b)	<u>7</u>
(jede dieser beiden Punktzahlen aufgeteilt in Anteile etwa entsprechend den Teilschritten in I.)	12