vorlauf[?]



# XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

## 281241

Man ermittle alle reellen Lösungen (x,y,z) des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$x + 2y + 3z = \sqrt{14}.$$

## 281242

Man untersuche, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ jeweils eine Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es gibt eine reelle Zahl x mit $f(x) \neq 0$.

(3) Wenn man Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ durch die Festsetzungen definiert, für alle reellen x gelte

$$f_1(x) = f(x)$$

sowie

$$f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) \quad \text{für } k = 1, \ldots, n,$$

dann gilt für alle reellen x die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x).$$

A 11/12;I

<u>281243</u>

Man ermittle alle diejenigen konvexen Vielecke $P_1P_2...P_n$, in deren Inneren ein Punkt X existiert, für den $\overline{P_1X}^2 + \overline{P_2X}^2 + ... + \overline{P_nX}^2$ gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2...P_n$ ist.

Umlauft

A 11/12;II

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

281244

Um einen Tresor zu öffnen, ist eine unbekannte dreistellige Zahlenkombination $(a_1, a_2, a_3)$ einzustellen, wobei die drei Zahlen unabhängig voneinander eingestellt werden können und für jede der drei Zahlen genau 8 Werte möglich sind. Infolge eines Defektes öffnet sich aber der Tresor bereits immer genau dann, wenn eine eingestellte Kombination $(k_1, k_2, k_3)$ mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ $(i=1,2,3)$ erfüllt.
Man ermittle die kleinste Zahl N, für die es N Kombinationen gibt, bei deren Durchprobieren der Tresor in jedem Fall (d. h. für jede unbekannte Kombination $(a_1, a_2, a_3)$) sich öffnen muß.

281245

Für ein Tetraeder ABCD werde vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders im Innern des Tetraeders liegt. Die Verbindungsgerade von M mit jeweils einer Tetraederecke A,B,C bzw. D schneide die Seitenfläche des Tetraeders, die der betreffenden Ecke gegenüberliegt, in A',B',C' bzw. D'. Der Radius der Umkugel sei r.
Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} \geqq \frac{16}{3} r$$

folgt!

Von den nachstehenden Aufgaben 281246 A und 281246 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

281246 A

Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 1$ und für je $n+2$ reelle Zahlen $p, q, a_1, \ldots, a_n$, die

$$0 < p \leqq a_i \leqq q \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

erfüllen, gelten die beiden Ungleichungen

$$n^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \leqq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2. \qquad (2)$$

(Hinweis: Zu reellem x bezeichnet wie üblich $[x]$ die ganze Zahl $[x] = g$ mit $g \leqq x < g+1$).
Man ermittle ferner zu gegebenen n,p,q mit $0 < p \leqq q$ alle diejenigen $a_i$ mit (1), für die in (2)

a) zwischen der ersten und zweiten Zahl,
b) zwischen der zweiten und dritten Zahl

das Gleichheitszeichen gilt.

<u>281246 B</u>

Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Quadraten der Seitenlänge 1, die sich in ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge 1,99 legen lassen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne sich gegenseitig zu überlappen.

Urlauft

L 11/12;I

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

281241) Lösung: 5 Punkte

I. Wenn ein Tripel $(x, y, z)$ reeller Zahlen das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{1}$$
$$x + 2y + 3z = \sqrt{14} \tag{2}$$

löst, so folgt:

Nach (2) ist

$$x = \sqrt{14} - 2y - 3z; \tag{3}$$

hieraus und aus (1) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\sqrt{14} - 2y - 3z)^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ &= 10\cdot\left(z^2 + \tfrac{6}{5}yz - \tfrac{3}{5}z\sqrt{14} + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{2}{5}y\sqrt{14} + \tfrac{13}{10}\right) \\ &= 10\cdot\left(\left(z + \tfrac{3}{5}y - \tfrac{3}{10}\sqrt{14}\right)^2 + \tfrac{7}{50}y^2 - \tfrac{1}{25}y\sqrt{14} + \tfrac{1}{25}\right) \\ &= 10\cdot\left(z + \tfrac{3}{5}y - \tfrac{3}{10}\sqrt{14}\right)^2 + \tfrac{7}{5}\cdot\left(y - \tfrac{1}{7}\sqrt{14}\right)^2. \end{aligned}$$

Dies ist nur möglich, wenn die beiden Gleichungen

$$z + \tfrac{3}{5}y = \tfrac{3}{10}\sqrt{14}, \tag{4}$$
$$y = \tfrac{1}{7}\sqrt{14} \tag{5}$$

gelten. Aus (4) und (5) folgt

$$z = \left(\tfrac{3}{10} - \tfrac{3}{35}\right)\sqrt{14} = \tfrac{3}{14}\sqrt{14}, \tag{6}$$

aus (5), (6) und (3) folgt

$$x = \left(1 - \tfrac{2}{7} - \tfrac{9}{14}\right)\sqrt{14} = \tfrac{1}{14}\sqrt{14}. \tag{7}$$

II. Umgekehrt folgt aus (5),(6),(7), daß

$$x^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{1}{14} + \tfrac{2}{7} + \tfrac{9}{14} = 1$$

und

$$x + 2y + 3z = \left(\tfrac{1}{14} + \tfrac{2}{7} + \tfrac{9}{14}\right)\sqrt{14} = \sqrt{14}$$

gelten, also (1) und (2) erfüllt sind.

Daher hat das Gleichungssystem genau die Lösung

$$(x,y,z) = (\tfrac{1}{14}\sqrt{14},\ \tfrac{1}{7}\sqrt{14},\ \tfrac{3}{14}\sqrt{14})$$
$$(= (\tfrac{1}{\sqrt{14}},\ \tfrac{2}{\sqrt{14}},\ \tfrac{3}{\sqrt{14}})).$$

Anderer Lösungsweg in I.:

Durch Subtraktion der mit $\frac{2}{\sqrt{14}}$ multiplizierten Gleichung (2) von der Gleichung (1) und Addition von $\frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14} = 1$ folgt

$$(x^2 - \frac{2x}{\sqrt{14}} + \frac{1}{14}) + (y^2 - \frac{4y}{\sqrt{14}} + \frac{4}{14}) + (z^2 - \frac{6z}{\sqrt{14}} + \frac{9}{14}) = 1 - 2 + 1,$$

$$(x - \frac{1}{\sqrt{14}})^2 + (y - \frac{2}{\sqrt{14}})^2 + (z - \frac{3}{\sqrt{14}})^2 = 0$$

und daraus (5),(6),(7).

281242) Lösung: 6 Punkte

Es gibt zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 1$ jeweils eine derartige Funktion f. Um dies nachzuweisen, genügt es, jeweils zu n eine Funktion f zu definieren und für diese die Bedingungen als erfüllt nachzuweisen.

1. Beispiel:

Man beweist zunächst, daß (jeweils zu n) eine reelle Zahl $a \neq 0$ mit

$$1 + a + \dots + a^{n-1} = a^n \qquad (4)$$

existiert. Diese Aussage ergibt sich etwa daraus, daß die für alle reellen x durch

$$g(x) = x^n - x^{n-1} - \dots - x - 1$$

definierte Funktion g einerseits $g(0) < 0$, andererseits $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ erfüllt und stetig ist, also eine positive Nullstelle a haben muß.

Dann definiert man f für alle x durch

$$f(x) = a \cdot x$$

und erhält hierfür sofort (1),(2) sowie wegen

$$f_1(x) = ax,\ f_2(x) = a^2x,\ \dots,\ f_n(x) = a^nx,\ f_{n+1}(x) = a^{n+1}x$$

und (4) auch

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = a\cdot(1 + a + \ldots + a^{n-1})\cdot x = a\cdot a^n\cdot x = f_{n+1}(x),$$

also (3).

2. Beispiel:

Man wählt Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ und definiert eine mit diesen Zahlen beginnende Folge

$(a_i)_{i=1,2,3,\ldots}$

~rch

$$a_{i+n+1} = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+n} \quad (i = 0,1,2,\ldots). \tag{5}$$

Durch vollständige Induktion erweist sich diese Folge im Fall $n = 1$ als konstant, im Fall $n > 1$ als streng monoton steigend. Also wird durch

$$f(x) = \begin{cases} a_{i+1}, & \text{wenn ein } i \in \{1,2,\ldots\} \text{ mit } x = a_i \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion f für alle reellen x definiert, d. h. (1) erfüllt; sie erfüllt auch (2). Ferner ergibt sich: Einerseits ist für jedes $x = a_i$

$$f_1(a_i) = a_{i+1},\ f_2(a_i) = a_{i+2}, \ldots,\ f_n(a_i) = a_{i+n},$$
$$f_{n+1}(a_i) = a_{i+n+1}; \tag{6}$$

andererseits ist für jedes x, zu dem kein $i \in \{1,2,\ldots\}$ mit $x = a_i$ existiert,

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0. \tag{7}$$

Mit (6),(5) sowie mit (7) ergibt sich (3) für alle x.

281243) Lösung: 7 Punkte

Für je drei Punkte $P_i$, $P_j$, X, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, gilt wegen $\sin \overline{\sphericalangle P_iXP_j} \leqq 1$

$$\overline{P_iX}^2 + \overline{P_jX}^2 - 2\cdot\overline{P_iX}\cdot\overline{P_jX}\cdot\sin \overline{\sphericalangle P_iXP_j} \geqq (\overline{P_iX} - \overline{P_jX})^2 \geqq 0. \tag{1}$$

In der ersten Ungleichung in (1) steht das Gleichheitszeichen genau im Fall $\overline{\sphericalangle P_iXP_j} = 90^\circ$, in der zweiten genau im Fall $\overline{P_iX} = \overline{P_jX}$.

Da $\frac{1}{2} \cdot \overline{P_iX} \cdot \overline{P_jX} \cdot \sin \overline{\sphericalangle P_iXP_j}$ der Flächeninhalt des Dreiecks $P_iXP_j$ ist, besagt dies:

$\frac{1}{2} \cdot (\overline{P_iX}^2 + \overline{P_jX}^2)$ ist stets größer oder gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_iXP_j$; das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $P_iXP_j$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei X ist. (2)

Es sei nun $P_1P_2 \ldots P_n$ ein beliebiges konvexes Vieleck und X ein beliebiger Punkt in seinem Innern. Wendet man die Aussage (2) auf alle $(i,j) = (1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n),(n,1)$ an, so folgt:

$$\overline{P_1X}^2 + \overline{P_2X}^2 + \ldots + \overline{P_nX}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\overline{P_1X}^2+\overline{P_2X}^2) + \tfrac{1}{2}(\overline{P_2X}^2+\overline{P_3X}^2) + \ldots + \tfrac{1}{2}(\overline{P_{n-1}X}^2+\overline{P_nX}^2) + \tfrac{1}{2}(\overline{P_nX}^2+\overline{P_1X}^2)$$

ist stets größer oder gleich der Summe der doppelten Flächeninhalte von $P_1XP_2$, $P_2XP_3$, ..., $P_{n-1}XP_n$, $P_nXP_1$, d. h. größer oder gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2 \ldots P_n$; das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn alle Dreiecke $P_iXP_j$ $\big((i,j) = (1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n),(n,1)\big)$ gleichschenklig-rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei X sind.

Da die Summe der bei X liegenden Innenwinkel in diesen Dreiecken $360^\circ$ beträgt, ist die Gültigkeit des Gleichheitszeichens nur für $n = 4$ erreichbar, und dabei sind die Bedingungen

$\overline{\sphericalangle P_1XP_2} = \overline{\sphericalangle P_2XP_3} = \overline{\sphericalangle P_3XP_4} = 90^\circ$, $\overline{P_1X} = \overline{P_2X} = \overline{P_3X} = \overline{P_4X}$ genau dann erfüllt, wenn $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat und X sein Mittelpunkt ist.

Die gesuchten konvexen Vielecke, die die geforderte Bedingung erfüllen, sind also genau alle Quadrate.

L 11/12;II

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

**281244) Lösung:** **8 Punkte**

Für eine Kombination $k = (k_1,k_2k_3)$ werde genau dann gesagt, sie "überdecke" $(a_1,a_2,a_3)$, wenn sie mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ erfüllt. Die 8 möglichen Werte der $a_i$ seien o.B.d.A. die Zahlen 0,1,...,7.

I. Es seien S,T,U die Mengen

$$S = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\},$$
$$T = \{(0,0,2),(0,2,0),(2,0,0),(2,2,2)\},$$
$$U = \{(0,0,0),(4,4,4)\}.$$

Die 32 Kombinationen

$$k = s + t + u \quad (s \in S,\ t \in T,\ u \in U)$$

bilden ein Beispiel für Kombinationen, mit denen alle $8^3$ Kombinationen $(a_1,a_2,a_3)$ überdeckt werden. Um dies zu beweisen, sei eine beliebige dieser Kombinationen $(a_1,a_2,a_3)$ betrachtet. Man setze zunächst

$$u = (u_1,u_2,u_3) = \begin{cases} (0,0,0), \text{ falls mindestens zwei } a_m,a_n \leqq 3 \text{ sind } (m \neq n), \\ (4,4,4) \text{ sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Hiernach gibt es stets zwei Indizes $m<n$ so, daß für $i = m$ und für $i = n$ gilt: Die Zahl

$$b_i = a_i - u_i \quad (2)$$

erfüllt $0 \leqq b_i \leqq 3$; also existieren

$$s_i \in \{0;1\}, \quad t_i \in \{0;2\}. \quad (3)$$

mit

$$b_i = s_i + t_i. \quad (4)$$

Für jede Möglichkeit des Indexpaares $(m;n) = (1;2),(1;3),(2;3)$ und für jede gemäß (3) bestehende Möglichkeit der $s_i$, $t_i$ findet man nach Definition von S und T ein $s = (s_1,s_2,s_3) \in S$ und ein $t = (t_1,t_2,t_3) \in T$, in denen $s_m$, $s_n$ bzw. $t_m$, $t_n$ gerade die

30 10 64-1

Zahlen aus (3) und (4) sind. Die hiermit sowie mit u aus (1) gebildete Kombination $k = (k_1,k_2,k_3) = s + t + u$ erfüllt nach (4) und (2) die beiden Bedingungen

$$k_i = s_i + t_i + u_i = b_i + u_i = a_i \quad (i = m, n),$$

w.z.b.w.

II. Angenommen, es existiere eine Menge K von höchstens 31 Kombinationen, mit denen alle $8^3$ Kombinationen $(a_1,a_2,a_3)$ überdeckt werden. Aus dieser Annahme läßt sich z. B. folgendermaßen ein Widerspruch herleiten:

Zunächst folgt, daß für mindestens einen der 8 Werte $p = 0,\dots,7$ die Menge P aller $(p,y,z)$ $(y,z \in \{0,\dots,7\})$ höchstens drei Kombinationen aus K enthält. Daher gibt es erst recht drei paarweise verschiedene Zahlen c,d,e so, daß aus $(k_1,k_2,k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_2 \in \{c,d,e\}$ folgt, und es gibt Zahlen[1] f,g,h so, daß aus $(k_1,k_2,k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_3 \in \{f,g,h\}$ folgt.

Die Menge aller

$$(p,y,z) \quad (y \in \{0,\dots,7\} \setminus \{c,d,e\}; \quad z \in \{0,\dots,7\} \setminus \{f,g,h\}) \quad (5)$$

enthält mindestens[2] $(8-3)\cdot(8-3) = 25$ Kombinationen. Jede von ihnen wird nach Annahme durch ein $(k_1,k_2,k_3) \in K$ überdeckt. Nach Wahl der c,...,f ist das nur mit $k_1 \neq p$ und folglich jeweils nur mit $k_2 = y$, $k_3 = z$ möglich; somit müssen zu je zwei voneinander verschiedenen Kombinationen (5) auch zwei voneinander verschiedene überdeckende Kombinationen aus K gehören. Damit ist gezeigt, daß es mindestens 25 Kombinationen $(k_1,k_2,k_3) \in K$ mit $k_2 \notin \{c,d,e\}$ geben muß und folglich höchstens $31-25 = 6$ mit $k_2 \in \{c,d,e\}$ geben kann.

Wegen der paarweisen Verschiedenheit der c,d,e folgt nun, daß für mindestens einen der 3 Werte $q = c,d,e$ die Menge Q aller $(x,q,z)$ $(x,z \in \{0,\dots,7\})$ höchstens zwei Kombinationen aus K enthält. Analog wie bei P ergibt sich hieraus die Existenz von mindestens $(8-2)\cdot(8-2) = 36$ Kombinationen in K und damit ein Widerspruch.

Mit I., II. ist als gesuchte kleinste Zahl N = 32 nachgewiesen.

---

1 Von f,g,h wird im weiteren Beweis keine paarweise Verschiedenheit benötigt (obwohl sie auch erreichbar wäre).

2 Vgl. Anmerkung 1.

**281245) Lösung:** **7 Punkte**

Bezeichnet man die Volumina der Tetraeder ABCD, MBCD, MACD, MABD bzw. MABC mit $V$, $V_1$, $V_2$, $V_3$ bzw. $V_4$, so gilt $V_i > 0$ $(i=1,2,3,4)$ und

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V. \tag{1}$$

Sind $h_1$, $h_2$, $h_3$ bzw. $h_4$ die Längen der Höhen des Tetraeders ABCD bezüglich der Grundflächen BCD, ACD, ABD bzw. ABC und $h_1'$, $h_2'$, $h_3'$ bzw. $h_4'$ die Längen der Höhen der Tetraeder MBCD, MACD, MABD bzw. MABC bezüglich derselben Grundflächen, so gilt

$$\frac{V_i}{V} = \frac{h_i'}{h_i} \quad (i = 1,2,3,4). \tag{2}$$

Die Lote von A und M auf die Ebene durch B,C,D sind zueinander parallel; daher liegen sie mit der Geraden durch A,M,A' in einer Ebene, und aus dem Strahlensatz folgt die erste der Gleichungen

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \frac{h_1'}{h_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\overline{MD'}}{\overline{DD'}} = \frac{h_4'}{h_4}; \tag{3}$$

die übrigen ergeben sich analog für B,C bzw. D statt A.

Aus (1),(2),(3) folgt

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{MC'}}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{MD'}}{\overline{DD'}} = 1,$$

wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MD} = r$ also

$$\frac{\overline{AA'} - r}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{BB'} - r}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{CC'} - r}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{DD'} - r}{\overline{DD'}} = 1,$$

$$\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} + \frac{1}{\overline{DD'}} = \frac{3}{r}. \tag{4}$$

Da das harmonische Mittel der vier Kantenlängen $\overline{AA'}, \ldots, \overline{DD'}$ nicht größer als ihr arithmetisches Mittel ist, gilt

$$\frac{4}{\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} + \frac{1}{\overline{DD'}}} \leqq \frac{\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'}}{4}.$$

Hieraus und aus (4) folgt

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} \geqq \frac{16}{\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} + \frac{1}{\overline{DD'}}} = \frac{16}{3} r,$$

w.z.b.w.

281246 A) Lösung: 7 Punkte

Die zweite Zahl in (2) ist die Zahl

$$
\begin{aligned}
z = 1 &+ \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right) + \left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_3}\right) + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_1} + \frac{a_1}{a_{n-1}}\right) + \left(\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_1}{a_n}\right) \\
&+ 1 \quad + \left(\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{a_3}\right) + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_2} + \frac{a_2}{a_{n-1}}\right) + \left(\frac{a_n}{a_2} + \frac{a_2}{a_n}\right) \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + 1 \quad + \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad + 1
\end{aligned}
$$

$$= n + \sum_{1 \leqq i < k \leqq n} \left(\frac{a_k}{a_i} + \frac{a_i}{a_k}\right). \qquad (3)$$

I. Für jedes positive $x$ ist bekanntlich $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ mit Gleichheit genau für $x = 1$. Wendet man dies auf die Glieder des Summenzeichens in (3) jeweils mit $x = \frac{a_k}{a_i}$ an, so folgt wegen der bekannten Anzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ der Paare $(i,k)$ mit $1 \leqq i < k \leqq n$

$$z \geqq n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2.$$

Damit ist die linke Ungleichung in (2) bewiesen, und man erhält zu a): Das Gleichheitszeichen gilt genau im Fall $a_1 = \ldots = a_n$.

II. Außer (1) sei o.B.d.A.

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$$

angenommen.

Für $1 \leqq x \leqq y$ gilt stets

$$0 \leqq (xy - 1)(y - x)$$

oder, äquivalent hiermit,

$$x^2y + y \leqq xy^2 + x,$$

$$x + \frac{1}{x} \leqq y + \frac{1}{y}$$

mit Gleichheit genau für $x = y$. Aus $p \leqq a_i \leqq a_k$ folgt daher

$$\frac{a_k}{a_i} + \frac{a_i}{a_k} \leqq \frac{a_k}{p} + \frac{p}{a_k}$$

mit Gleichheit genau für $a_i = p$; und aus $a_i \leqq a_k \leqq q$ folgt

$$\frac{a_k}{a_i} + \frac{a_i}{a_k} \leqq \frac{q}{a_i} + \frac{a_i}{q}$$

mit Gleichheit genau für $a_k = q$.

Für jede ganze Zahl $m$ mit $0 \leqq m \leqq n$ gilt somit: Ersetzt man in $z$ die Zahlen[1] $a_1, \ldots, a_m$ der Reihe nach durch $p$ und die Zahlen[2] $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{m+1}$ der Reihe nach durch $q$, so erhält man eine Zahl $z' \geqq z$; d. h., es gilt

$$\begin{aligned} z &\leqq (m \cdot p + (n-m) \cdot q) \cdot (m \cdot \frac{1}{p} + (n-m) \cdot \frac{1}{q}) \\ &= m^2 + (n-m)^2 + m \cdot (n-m) \cdot (\frac{p}{q} + \frac{q}{p}) \\ &= m^2 + n^2 - 2mn + m^2 + m \cdot (n-m) \cdot (\frac{p}{q} + \frac{q}{p}) \\ &= n^2 + m \cdot (n-m) \cdot (\frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2) \\ &= n^2 + m \cdot (n-m) \cdot (\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}})^2, \end{aligned} \qquad (4)$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn in $z$ bereits $a_1 = \ldots = a_m = p$, $a_{m+1} = \ldots = a_n = q$ war.

In Abhängigkeit von $m$ ist nun $m(n-m) = \frac{n^2}{4} - (\frac{n}{2} - m)^2$ im Intervall $\left[0, \frac{n}{2}\right]$ streng monoton steigend, im Intervall $\left[\frac{n}{2}, n\right]$ streng monoton fallend. Für gerades $n$ folgt hieraus

$$m(n-m) \leqq \frac{n^2}{4} = \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

mit Gleichheit genau für $m = \frac{n}{2}$.

Für ungerades $n$ gilt sowohl mit der größten ganzen Zahl $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ des Intervalls $\left[0, \frac{n}{2}\right]$ als auch mit der kleinsten ganzen Zahl $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ des Intervalls $\left[\frac{n}{2}, n\right]$ die Gleichung $(\frac{n}{2} - m)^2 = \frac{1}{4}$; für alle ganzen Zahlen $m$ in $[0, n]$ folgt daher

$$m(n-m) \leqq \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} = \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

mit Gleichheit genau für $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ und $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

---

1 Für $m = 0$ entfällt diese Aufzählung.

2 Für $m = n$ entfällt diese Aufzählung.



Imprimatur nach Korrektur [illegible]

Zusammen mit (4) ist damit der Beweis der rechten Ungleichung in (2) erbracht, und zu b) ist gezeigt:
Das Gleichheitszeichen gilt für gerades n genau dann, wenn

$\frac{n}{2}$ der $a_i$ den Wert p und $\frac{n}{2}$ der $a_i$ den Wert 9 haben;

es gilt für ungerades n genau dann, wenn
entweder $\left[\frac{n}{2}\right]$ der $a_i$ den Wert p und $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ der $a_i$ den Wert q haben
oder $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ der $a_i$ den Wert p und $\left[\frac{n}{2}\right]$ der $a_i$ den Wert q haben.

<u>Bemerkungen:</u>

1. Die Abschätzung von $m(n-m)$ und die Aussagen zum Gleichheitszeichen können (anstelle der Monotoniebetrachtung) auch durch direkten Vergleich erfolgen, für gerades n durch

$$\frac{n^2}{4} - m(n-m) = \left(m - \frac{n}{2}\right)^2 \geqq 0 \quad \text{für alle } m,$$

   für ungerades n durch

$$\frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} - m(n-m) = \left(m - \frac{n-1}{2}\right)\left(m - \frac{n+1}{2}\right) \geqq 0$$

$$\text{für alle } m \leqq \frac{n-1}{2} \text{ und alle } m \geqq \frac{n+1}{2}.$$

2. Vermittels $pa_i \leqq a_k q$ und $pa_k \leqq a_i q$, also

$$p^2 a_i a_k + q^2 a_i a_k - pqa_k{}^2 - pqa_i{}^2 = (pa_i - a_k q)(pa_k - a_i q) \geqq 0$$

   folgt einheitlich für alle i, k

$$\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) - \left(\frac{a_k}{a_i} + \frac{a_i}{a_k}\right) \geqq 0.$$

   Damit erhält man aus (3) statt der rechten Ungleichung (2) die schwächere Abschätzung

$$z \leqq n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

   Bei der Bewertung von Schülerlösungen, die (z. B. auf diesem Wege) den geforderten Nachweis als Ganzes verfehlen, ist zu berücksichtigen, ob es möglich ist, noch einzelne Punktanteile für Teilschritte wie z. B. die Nutzung von (3) zu vergeben.

281246 B) Lösung: 7 Punkte

Die gesuchte größtmögliche Anzahl ist 1. Zum Beweis hierfür hat man (da offenbar ein Quadrat der Seitenlänge 1 in das gegebene Quadrat gelegt werden kann) zu zeigen, daß sich je zwei in dem gegebenen Quadrat ABCD liegende Quadrate der Seitenlänge 1 gegenseitig überlappen müssen. Hierfür genügt es, nachzuweisen, daß jedes in ABCD liegende Quadrat der Seitenlänge 1 in seinem Innern den Mittelpunkt M von ABCD enthalten muß.

Angenommen nun, es gäbe in ABCD ein Quadrat PQRS der Seitenlänge 1, in dessen Innern M nicht liegt (Abb. L 281246B)[1]. Die Geraden durch P,Q bzw. Q,R bzw. R,S bzw. S,P seien p,q,r bzw. s. Dann läge M auf dem Rand oder außerhalb mindestens eines der beiden Streifen zwischen p,r bzw. zwischen q,s. Also hätte M von mindestens einer der Geraden p,q,r,s einen Abstand größer oder gleich 1, o.B.d.A. von p.

Somit läge p ganz außerhalb des Inkreises k von ABCD, da dieser den Radius $\frac{1}{2} \cdot 1{,}99 < 1$ hat. Andererseits enthielte der Durchschnitt von p mit der Quadratfläche ABCD mindestens die Strecke PQ und wäre daher selbst eine Strecke XY. Da nun die Quadratfläche ABCD mit dem Außengebiet von k nur die vier paarweise disjunkten Flächenstücke $A\overset{\frown}{EH}$, $B\overset{\frown}{FE}$, $C\overset{\frown}{GF}$, $D\overset{\frown}{HG}$ gemeinsam hat (E,F,G,H seien die Mittelpunkte von AB, BC, CD, DA; die Flächenstücke seien jeweils ohne die Kreisbogenstücke $\overset{\frown}{EH}$, $\overset{\frown}{FE}$, $\overset{\frown}{GF}$, $\overset{\frown}{HG}$, aber einschließlich der übrigen Randpunkte verstanden), müßte die Strecke XY ganz in einem dieser Flächenstücke liegen, o.B.d.A. in AEH. Ihre Endpunkte X,Y müßten Randpunkte von ABCD sein, wegen $\overline{XY} \geqq \overline{PQ} = 1 > \frac{1}{2} \cdot 1{,}99 = \overline{AH}$ also o.B.d.A. mit X auf AH und Y auf $\overline{AE}$.

Unter allen Geraden, die parallel zu p sind und durch einen Punkt der Strecke XH gehen, muß es (genau) eine geben, die k berührt; denn p selbst liegt außerhalb k, und die Parallele durch H zu p schneidet den Kreis k in zwei Punkten (da sie nicht auf dem Radius MH senkrecht steht). Diese k berührende Gerade u schneidet die Strecke XH also in einem inneren Punkt U und somit die Strecke YE in einem inneren Punkt V, ihr Berührungspunkt mit k sei W.

---

1 Eine Abbildung kann nicht alle diese Bedingungen der Eingangsannahme einhalten, die ja mit dem oben folgenden indirekten Beweis widerlegt wird. In der Abb. L 281246B wird die Bedingung $\overline{PQ} \quad \frac{1}{2}\overline{AB}$ nicht eingehalten.

Wegen $\overline{AX} < \overline{AU}$ ist nach dem Strahlensatz auch $\overline{XY} < \overline{UV}$; hiermit folgte nach der Dreiecksungleichung und nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte

$$1 = \overline{PQ} \leqq \overline{XY} < \overline{UV} < \frac{1}{2}(\overline{AU}+\overline{AV} + \overline{UW}+\overline{VW}) = \frac{1}{2}(\overline{AU}+\overline{AV} + \overline{UH}+\overline{VE})=\overline{AE} = \frac{1}{2}\cdot 1{,}99.$$

Dieser Widerspruch beendet den Beweis.

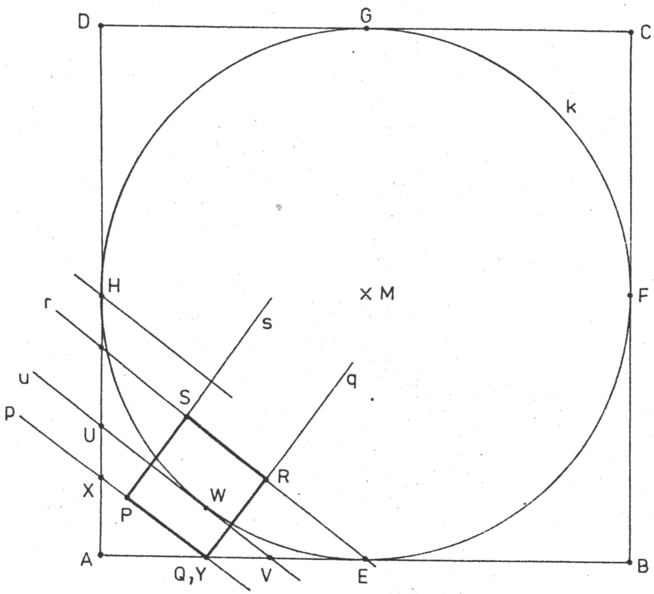


Abb. L 281246 B