XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

281221

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=z, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-x, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=y. \qquad (3)$$

281222

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ sei f_n die durch

$$f_1(x) = (x-1)^2,$$
$$f_2(x) = (x-1)^2+(2x-1)^2,$$
allgemein
$$f_n(x) = (x-1)^2+(2x-1)^2+\ldots+(nx-1)^2$$

für alle reellen x definierte Funktion. Der Graph dieser Funktion, jeweils eine Parabel, habe den Scheitel S_n.

a) Man berechne die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3.

b) Hat jeweils S_n die Koordinaten (x_n, y_n), so beweise man, daß die Folge (x_n) streng monoton fällt und die Folge (y_n) streng monoton steigt.

A 11/12

281223

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, gegeben sei ferner ein von M verschiedener Punkt N im Innern von k.
Man untersuche, ob es unter allen durch N gehenden Sehnen AB des Kreises k

a) eine gibt, für die $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst klein ist,

b) eine gibt, für die $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst groß ist.

Gibt es jeweils eine solche Sehne, so gebe man deren Lage (in bezug auf die gegebenen k,M,N) an.

281224

Die ganzen Zahlen x_n und y_n seien durch $x_1 = y_1 = 1988$ und die Vorschriften

(1) $x_{n+1} = 2x_n - 1, \quad n = 1,2,3,\ldots$

(2) $y_{n+1} = 2y_n - 2^{n+1}, \quad n = 1,2,3,\ldots$

festgelegt. Man untersuche, ob

a) alle Zahlen x_n,

b) alle Zahlen y_n

positiv sind.

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

281221) Lösung: 9 Punkte

I. Angenommen, es gibt ein Tripel (x,y,z) von Null verschiedener reeller Zahlen, für das (1), (2) und (3) gilt.

Aus (1), (2), (3) folgt dann (durch Multiplikation mit xy, yz bzw. xz)

$$x + y = xyz, \qquad (1')$$

$$y + z = -xyz, \qquad (2')$$

$$x + z = xyz. \qquad (3')$$

Aus (1') und (3') folgt

$$y = z. \qquad (4)$$

Damit folgt aus (1') und (2') durch Addition $x+3z = 0$, also

$$x = -3z. \qquad (5)$$

Mit (4) und (5) ergibt (2')

$$2z = 3z^3.$$

Wegen $z \neq 0$ folgt hieraus $z^2 = \frac{2}{3}$,

$$z = \pm \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Hiernach ergibt sich aus (4) und (5)

$$y = \pm \frac{1}{3}\sqrt{6},$$

$$x = \mp \sqrt{6}$$

(jeweils entsprechend mit dem oberen oder dem unteren Vorzeichen).

Als Lösungen des Gleichungssystems (1), (2), (3) kommen also nur die Tripel $(-\sqrt{6}, +\frac{1}{3}\sqrt{6}, +\frac{1}{3}\sqrt{6})$ und $(+\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6})$ in Frage.

II. Tatsächlich erfüllen beide Tripel das System (1), (2), (3), wie aus

$$\mp \frac{1}{\sqrt{6}} \pm \frac{3}{\sqrt{6}} = \pm \frac{2}{\sqrt{6}} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{6} \text{ für (1) und (3) und aus}$$

$$\pm \frac{3}{\sqrt{6}} \pm \frac{3}{\sqrt{6}} = \pm \frac{6}{\sqrt{6}} = \pm \sqrt{6} \quad \text{für (2) hervorgeht.}$$

281222) Lösung: 10 Punkte

Nach der Definition von f_n ist mit bekannten Summenformeln

$$f_n(x) = x^2(1^2+2^2+...+n^2)-2x(1+2+...+n)+n$$
$$= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)x^2 -n(n+1)x +n$$
$$= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(x - \tfrac{3}{2n+1})^2 - \tfrac{3}{2}n(n+1)\tfrac{1}{2n+1} +n$$
$$= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(x - \tfrac{3}{2n+1})^2 + \tfrac{n(n-1)}{2(2n+1)}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß der Scheitel S_n dieser Parabel die Koordinaten

$$x_n = \frac{3}{2n+1}, \quad y_n = \frac{n(n-1)}{2(2n+1)}$$

hat.

a) Insbesondere* sind die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3

$$x_1 = 1, \qquad y_1 = 0,$$
$$x_2 = \tfrac{3}{5}, \qquad y_2 = \tfrac{1}{5},$$
$$x_3 = \tfrac{3}{7}, \qquad y_3 = \tfrac{3}{7}.$$

b) Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ ist

$$2n+1 < 2n+3.$$

Wegen $2n+1 > 0$ folgt daraus

$$\frac{3}{2n+3} < \frac{3}{2n+1},$$

d. h. $x_{n+1} < x_n$. Also ist die Folge (x_n) streng monoton fallend.

Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ ist

$$2n^2 + 3n +1 > 2n^2 + n -3,$$
$$(n+1)(2n+1) > (n-1)(2n+3),$$
$$\frac{(n+1)n}{2(2n+3)} > \frac{n(n-1)}{2(2n+1)},$$

d. h. $y_{n+1} > y_n$. Also ist die Folge (y_n) streng monoton steigend.

---

*Die Ergebnisse zu a) können natürlich auch durch Berechnung von $f_1(x) = x^2-2x+1$, $f_2(x) = 5x^2-6x+2$, $f_3(x) = 14x^2-12x+3$ ohne den Weg über Formeln für allgemeines n gefunden werden.

281223) Lösung: 10 Punkte

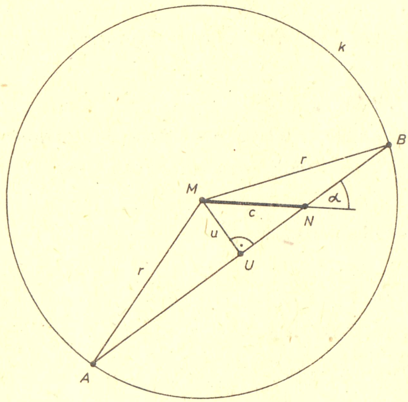

Abb. L 281223

Der Radius von k betrage r, ferner sei $c = \overline{MN}$. Ist AB eine Sehne durch N, so bezeichne U den Fußpunkt des Lotes von M auf AB. Mit $u = \overline{MU}$ gilt dann (bei geeigneter Reihenfolge der Bezeichnungen A, B)

$\overline{NA} = \overline{AU} + \overline{UN} = \sqrt{r^2 - u^2} + \sqrt{c^2 - u^2}$,

$\overline{NB} = \overline{BU} - \overline{UN} = \sqrt{r^2 - u^2} - \sqrt{c^2 - u^2}$.

Daher ist

$\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = 2(r^2 - u^2) + 2(c^2 - u^2)$

genau dann möglichst klein, wenn u möglichst groß ist, und genau dann möglichst groß, wenn u möglichst klein ist.

Damit folgt:

a) Für $u = \sqrt{c^2 - \overline{UN}^2}$ gibt es einen größtmöglichen Wert, nämlich $u = c$. Er wird angenommen, wenn der Lotfußpunkt U mit N zusammenfällt, d. h., wenn AB die auf MN senkrecht (durch N) verlaufende Sehne ist. Für diese Sehne ist somit $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst klein.

b) Für u gibt es einen kleinstmöglichen Wert, nämlich $u = 0$. Er wird angenommen, wenn U mit M zusammenfällt, d. h. wenn AB die durch (N und) M gehende Sehne ist. Für diese Sehne ist somit $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst groß.

Andere Lösungswege kommen z. B. bei anderer Wahl einer unabhängigen Variablen zustande, von der $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ abhängt. Bezeichnet z. B. α die Größe des Winkels $\sphericalangle$ MNA (oder seines Scheitelwinkels), so ist $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = 2(r^2 + c^2 - 2c^2 \sin^2 \alpha)$ zu diskutieren. Es wird minimal für $\alpha = 90^\circ$, maximal für $\alpha = 0^\circ$.

281224) Lösung: 11 Punkte

a) Durch Rechnung ergibt sich

$$x_2 = 2x_1 - 1 = 2(x_1 - 1) + 1,$$
$$x_3 = 2x_2 - 1 = 2(2x_1 - 1) - 1 = 2^2(x_1 - 1) + 1,$$
$$x_4 = 2x_3 - 1 = 2\left[2^2(x_1 - 1) + 1\right] - 1 = 2^3(x_1 - 1) + 1.$$

Hierdurch wird die Vermutung nahegelegt, daß

(3) $x_n = 2^{n-1}(x_1 - 1) + 1$, $n = 1,2,3,\ldots$, gilt.

Dies kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Für alle n gilt folglich $x_n > 0$.

Ein anderer Weg der Herleitung von (3) ist der folgende:

Aus (1) erhält man

$$x_{n+1} - 1 = 2(x_n - 1),\ n = 1,2,3,\ldots .$$

Also ist $\{x_n - 1\}$ eine geometrische Folge mit dem Quotienten 2 und dem Anfangsglied $x_1 - 1 = 1987$, was unmittelbar auf (3) führt.

b) Durch vollständige Induktion beweist man

(4) $\qquad y_n = (995 - n) \cdot 2^n$.

Für $n = 1$ gilt $y_1 = 1988 = (995 - 1) \cdot 2$

Wenn (4) für $n = k$ richtig ist, folgt für $n = k + 1$;

$$y_{k+1} = 2y_k - 2^{k+1} = 2(995 - k)2^k - 2^{k+1}$$

$$= [995 - (k + 1)] \cdot 2^{k+1}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt (4) somit für alle $n = 1,2,3,\ldots$. Folglich ist y_n für alle $n \geqq 996$ negativ.

Anderer Lösungsweg:

Aus (2) folgt

(5) $y_n = \frac{1}{2}y_{n+1} + 2^n$, $n = 1,2,3, \ldots$

Nimmt man an, daß alle Zahlen y_n nichtnegativ wären, so schließt man aus (5) zunächst auf $y_n \geqq 2^n$.

Durch erneutes Einsetzen in (5) folgt hieraus

$$y_n \geqq \frac{1}{2}2^{n+1} + 2^n = 2 \cdot 2^n.$$

Weiterhin erhält man, wenn mit einer natürlichen Zahl m bereits

$y_n \geqq m2^n$ für alle $n = 1,2,3, \ldots$ erhalten wurde, durch Einsetzen in (5)

$$y_n \geqq \frac{1}{2}m2^{n+1} + 2^n = (m + 1)2^n.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion würde somit für alle natürlichen Zahlen m und n die Abschätzung $y_n \geqq m2^n$ gelten, was bereits für $n = 1$ und $m = 2000$ auf einen Widerspruch führt. Hieraus folgt, daß die Annahme, alle y_n wären nichtnegativ, falsch war. Es gibt also negative y_n.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

281221

Eliminieren einer Variablen	2 Punkte
Eliminieren einer weiteren Variablen	2 Punkte
Ermitteln aller Lösungstripel	3 Punkte
Probe (oder Äquivalenznachweis)	2 Punkte
	9 Punkte

281222

a) Berechnung der gesuchten Koordinaten	3 Punkte
b) Gewinnen einer Darstellung (der Koeffizienten) von $f(x)$	2 Punkte
Ermitteln der Scheitelkoordinaten von S_n (mit Hilfe "quadratischer Ergänzung" oder durch Zitat einer im Unterricht behandelten "Formel")	2 Punkte
Rechnerisch und logisch korrekte Herleitung der Monotonieeigenschaften von (x_n)	1 Punkt
von (y_n)	2 Punkte
	10 Punkte

281223

Darstellen von $\overline{NA}^2+\overline{NB}^2$ in Abhängigkeit einer Variablen	5 Punkte
Diskussion zur Existenz eines minimalen (bzw. maximalen) Wertes und dessen Berechnung	3 Punkte
Diskussion und Berechnung des maximalen (minimalen) Wertes	2 Punkte
	10 Punkte

281224

a) Nachweis von $x_n > 0$ für alle x (z. B. aufgeteilt in:		
Induktionsbeweis eines Ausdrucks für x_n	3	4 Punkte
Nachweis, daß dieser Ausdruck stets positiv ist)	1	
b) Nachweis, daß ein $y_n \leqq 0$ existiert (z. B. aufgeteilt in:		
Induktionsbeweis eines Ausdrucks für y_n	5	7 Punkte
Nachweis, daß dieser Ausdruck nichtpositive Werte annehmen kann)	2	
		11 Punkte