Umlauft

A 10;I

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen.

281041

Zeigen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl n gibt, mit der

$$2^8 + 2^{11} + 2^n$$

eine Quadratzahl ist!

281042

Zeigen Sie, daß es ein Paar von Funktionen f, g gibt, für das folgende Aussagen gelten:

(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es ist $f(0) = 7$.

(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.

Von den nachstehenden Aufgaben 281043 A und 281043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

281043 A

Man denke sich die natürlichen Zahlen, beginnend mit 41, so spiralförmig angeordnet, wie aus der Abbildung A 281043 A als Anfang einer solchen Anordnung zu erkennen ist:

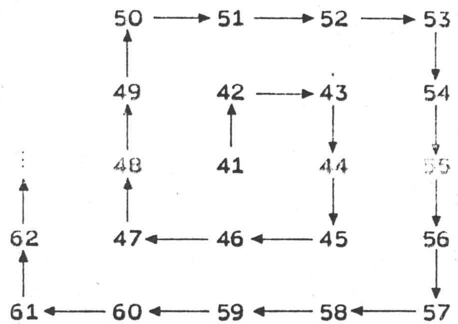


Abb. A 281043 A

Beweisen Sie, daß (bei dieser Anordnung) in der Diagonale, von der in Abbildung A 281043 A die Zahlen 61, 47, 41, 43, 53 auftreten, mindestens 30 Primzahlen stehen!

281043 B

Über 13 sonst beliebige Punkte in einer Ebene werde vorausgesetzt, daß sich unter je drei dieser 13 Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres sieben der 13 Punkte enthält.

b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

Verlauft

A 10;II

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

281044

Beweisen Sie, daß für keine reelle Zahl x die Gleichung

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$$

gilt!

281045

In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, daß g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und daß k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft. Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.
Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage. Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, daß ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.

281046

Beweisen Sie, daß zu jedem Quadrupel (a,b,c,d) positiver reeller Zahlen, für das

$$a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$$

gilt, ein Tripel (x,y,z) reeller Zahlen existiert, das die drei Gleichungen

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d,$$
$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d,$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

erfüllt!

Umlauft

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

281041) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn für eine natürliche Zahl n die genannte Zahl das Quadrat einer natürlichen Zahl k ist, so folgt

$$2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2,$$

$$2^n = k^2 - (1+8)\cdot 2^8 = k^2 - (3\cdot 2^4)^2 = (k - 48)(k + 48). \quad (1)$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung muß daher

$$k - 48 = 2^i, \quad k + 48 = 2^j \quad (2)$$

mit natürlichen Zahlen i,j sein. Daraus folgt $i < j$ sowie

$$2^j - 2^i = 96,$$

$$2^i\cdot(2^{j-i} - 1) = 2^5\cdot 3.$$

Nochmals wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und da $2^{j-i} - 1$ wegen $i < j$ ungerade ist, folgt

$$i = 5,$$

nach (2) also $k = 80$. Hieraus und aus (2) (oder auch aus $2^{j-i} - 1 = 3$, $j-i = 2$) ergibt sich

$$j = 7$$

und damit nach (2), (1)

$$2^n = 2^5\cdot 2^7,$$

$$n = 12.$$

II. In der Tat ist

$$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (1 + 8 + 16)\cdot 2^8 = (5\cdot 2^4)^2$$

eine Quadratzahl.

Mit I., II. ist gezeigt, daß die genannte Zahl für genau eine natürliche Zahl n, nämlich genau für $n = 12$, eine Quadratzahl ist.

Eine andere Lösungsmöglichkeit ergibt sich, indem man zunächst $96 = 2^j - 2^i \geq 2^j - 2^{j-1} = 2^{j-1}$, also $j \leq 7$ erhält und dann alle i,j mit $0 \leq i < j \leq 7$ durchprobiert.

Ulbrich 11.12.88

281042) Lösung: 6 Punkte

Für den geforderten Nachweis genügt es, ein Beispiel eines Paares von Funktionen f, g anzugeben und (1),(2),(3) für dieses Beispiel als erfüllt nachzuweisen. Ein solches Beispiel ist etwa:
Für alle reellen x sei

$$f(x) = 7 \cdot 2^x,$$
$$g(x) = 1.$$

In der Tat erfüllen diese Funktionen (1) und (2) sowie wegen ($f(x) \neq 0$ für alle x und)

$$\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 2^{x+1}}{7 \cdot 2^x} = 2 = g(2x) + 1$$

auch (3).

Bemerkungen:
Es gibt zahlreiche andere Beispiele, z. B.

$f(x) = 7 \cdot 2^k$ in jedem Intervall $k \leq x < k+1$ (k ganzzahlig),
$g(x) = x+1$ für alle x.

Heuristisches Hilfsmittel zum Auffinden derartiger Beispiele kann es sein, einen Ansatz $g(x) = \text{const}$, z. B. $g(x) = 1$, zur Vereinfachung von (3) zu wählen und so zur Forderung

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = 2$$

zu gelangen (oder auch umgekehrt mit diesem Ansatz zur Forderung $g(x) \cdot 2 = g(2x) + 1$).
Die Wiedergabe solcher heuristischen Ansätze ist für eine vollständige (logisch korrekte) Lösung der Aufgabe nicht erforderlich.

281043 A) Lösung: 7 Punkte

Um die Zahlen in der genannten Diagonale der Größe nach zu erreichen, hat man von der Zahl 41 aus, immer abwechselnd nach rechts oben und links unten, der Reihe nach Wege der Schrittlängen 1,2,3,4,... zu gehen. Jeder solche Weg einer Schrittlänge k läßt sich so durch insgesamt k waagerechte und k senkrechte Schritte ersetzen, daß dabei nur unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen durchlaufen werden.

Daraus sowie aus der Formel $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ folgt: In der Diagonale stehen die Zahlen

$$\begin{aligned} 41 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + \ldots + 2\cdot n &= 41 + n(n+1) \quad (n = 0,1,2,\ldots) \\ &= 41 + (x-1)\cdot x = x^2 - x + 41 \quad (x = 1,2,3,\ldots). \qquad (1) \end{aligned}$$

Nach einem (z. B. aus Aufgabe 281011 als Ergebnis von L. Euler) bekannten Sachverhalt sind alle für $x = 1,2,\ldots,40$ gebildeten Zahlen (1) Primzahlen, also erst recht mindestens 30 dieser Zahlen.

Anderer Lösungsweg:

Schreibt man die Zahlen in der spiralförmigen Anordnung soweit auf, bis in der genannten Diagonale 30 Zahlen erreicht sind, so erhält[1] man: Es handelt sich um die Zahlen

$$\begin{aligned} &41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 61,\ 71,\ 83,\ 97,\ 113,\ 131, \\ &151,\ 173,\ 197,\ 223,\ 251,\ 281,\ 313,\ 347,\ 383,\ 421, \\ &461,\ 503,\ 547,\ 593,\ 641,\ 691,\ 743,\ 797,\ 853,\ 911. \qquad (2) \end{aligned}$$

Für diese Zahlen bestätigt man durch einzelnes Nachrechnen[1]:

I. Die Quadratwurzeln aller Zahlen (2) sind kleiner als 31.

II. Alle Primzahlen unterhalb 31 sind
$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29. \qquad (3)$

III. Für jede der Zahlen (2) gilt: Sie ist durch keine der Primzahlen (3) teilbar.

Damit sind 30 Zahlen der genannten Diagonale als Primzahlen nachgewiesen.

Bemerkungen:

1. Wird ein Lösungsweg durch vollständiges Probieren gewählt (dies ist als logisch korrekt zu akzeptieren), so ist für die Schritte des Aufschreibens der Spirale und des Nachrechnens der Nicht-Teilbarkeit eine lediglich behauptende Textfassung nicht ausreichend, wie sie in der obigen Darstellung (anderer Lösungsweg) aus Platzgründen gegeben wurde.
2. Es gibt mehrere andere Lösungsvarianten. Beispielsweise kann man die Zahlen (2) durch Herleitung (1) ermitteln und dann die Aussagen I. bis III. beweisen. Dabei bestehen zu einzelnen Teilaussagen auch statt des Probierens effektivere Beweismöglichkeiten, z. B. durch (Nachweisen und) Anwenden von Gesetzmäßigkeiten über die Reste der Zahlen (1) bzw. (2) modulo der Primzahlen (3).

281043 B) Lösung: 7 Punkte

a) Es sei k der Kreis um einen (beliebig gewählten) der 13 Punkte mit dem Radius 1 cm. Für diesen Kreis trifft stets einer der beiden folgenden Fälle zu:

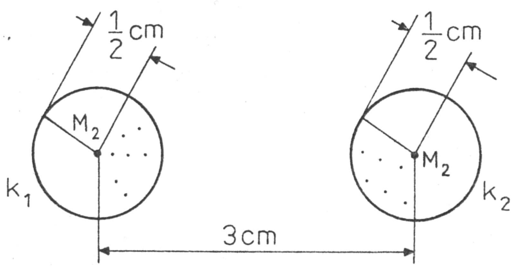
1. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Innern noch sechs weitere der 13 Punkte. Dann ist er ein Kreis der behaupteten Art.

2. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Innern höchstens fünf weitere der 13 Punkte. Dann gibt es auf dem Rand oder außerhalb von k noch sieben der 13 Punkte. Einer von ihnen sei P; für P und jeden der sechs anderen dieser sieben Punkte gilt: Sie haben beide vom Mittelpunkt des Kreises k Abstände nicht kleiner als 1 cm; nach Voraussetzung haben sie also voneinander einen Abstand kleiner als 1 cm. Folglich enthält das Innere des Kreises c um P mit dem Radius 1 cm auch jeden dieser sechs anderen Punkte, d. h., c ist ein Kreis der behaupteten Art.

b) Aus der Voraussetzung folgt nicht stets die Existenz eines Kreises der in b) genannten Art. Um dies zu beweisen, genügt es, ein Beispiel für 13 Punkte in einer Ebene so anzugeben, daß sie zwar die Voraussetzung erfüllen, daß aber kein Kreis vom Radius 1 cm existiert, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält. Ein solches Beispiel kann man etwa folgendermaßen bilden:

Man wähle zwei Kreise k_1, k_2 mit dem Radius $\frac{1}{2}$ cm, deren Mittelpunkte M_1, M_2 voneinander den Abstand 3 cm haben (Abb. L 281043 B). Im Inneren von k_1 wähle man sieben Punkte, im Innern von k_2 sechs Punkte.

Abb. L 281043 B



Unter je drei dieser 13 Punkte befinden sich dann stets zwei, die im Innern desselben der beiden Kreise k_1, k_2 liegen und daher[1] einen Abstand kleiner als 1 cm voneinander haben. Jeder Kreis c aber, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält, muß unter diesen acht Punkten sowohl einen inneren Punkt P_1 von k_1 als auch einen inneren Punkt P_2 von k_2 enthalten. Nach der Dreiecksungleichung[2] folgt, daß

$$3\text{ cm} = \overline{M_1M_2} \leq \overline{M_1P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2M_2} < \frac{1}{2}\text{ cm} + \overline{P_1P_2} + \frac{1}{2}\text{ cm},$$

also

$$\overline{P_1P_2} > 2\text{ cm}$$

gelten muß und daher[1] c einen Durchmesser größer als 2 cm haben muß. Somit kann es keinen Kreis mit dem Radius 1 cm geben, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

---

1 Daß der Abstand zweier innerer Punkte eines Kreises stets kleiner als der Durchmesser ist, folgt aus der Dreiecksungleichung, kann aber auch ohne Angabe dieser Herleitung als bekannter Sachverhalt verwendet werden.

2 Auch zur Schlußfolgerung $\overline{P_1P_2} > 2$ cm - oder sogleich zur Aussage der Nichtexistenz eines Kreises, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält, - kann bei hinreichend vollständiger Beschreibung des Sachverhalts eine Darstellung akzeptiert werden, in der die Begründung nicht bis zu einem expliziten Heranziehen der Dreiecksungleichung ausformuliert ist, sondern mehr anschaulich verläuft.

Urlaub

L 10;II

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

281044) Lösung: 6 Punkte

Es gilt, wie man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann,

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = (x^2 + 4)(x^2 - 6x + 10). \qquad (*)$$

Für alle reellen x gilt

$$x^2 + 4 > 0 \text{ und } x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 > 0.$$

Folglich gibt es kein reelles x, für das das Produkt Null wäre.

Bemerkungen:

1. Die Angabe eines heuristischen Weges zur Formel (*) ist für eine vollständige (logisch korrekte) Lösung der Aufgabe nicht erforderlich. Ein solcher Weg kann z. B. die Umformung

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = x^4 + 14x^2 + 40 - 6x(x^2 + 4) \qquad (1)$$

verwenden; die weitere Zerlegung

$$x^4 + 14x^2 + 40 = (x^2 + 4)(x^2 + 10) \qquad (2)$$

kann man z. B. vermittels der Substitution $z = x^2$ durch Lösen der quadratischen Gleichung $z^2 + 14z + 10 = 0$ finden. Aus (1) und (2) folgt dann (*) durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors $(x^2 + 4)$.

2. Es gibt statt (*) noch andere Lösungswege, z. B. vermittels

$$\begin{aligned} & x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 \\ &= x^2(x^2 - 6x + 9) + 5(x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{144}{25}) - \frac{144}{5} + 40 \\ &= x^2(x - 3)^2 + 5(x - \frac{12}{5})^2 + \frac{56}{5} \\ &\geqq \frac{56}{5} > 0 \quad \text{für alle reellen } x. \end{aligned}$$

Hümmer 1.12.88

Umlauft -

L 10;II

281045) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, ein gleichseitiges Dreieck ABC erfülle die geforderten Bedingungen; seine Seitenlänge habe die Maßzahl a. Das Lot von B auf g habe den Fußpunkt P und schneide k in Q, das Lot von A auf k habe den Fußpunkt R; die Punkte B und C seien[1] auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A,R gelegen. Für die Maßzahlen x, y von $\overline{PA}$, $\overline{RC}$ folgt dann, daß $\overline{QC}$ die Maßzahl x+y hat. Daher ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + 64 = a^2, \qquad (1)$$

$$y^2 + 25 = a^2, \qquad (2)$$

$$(x+y)^2 + 9 = a^2. \qquad (3)$$

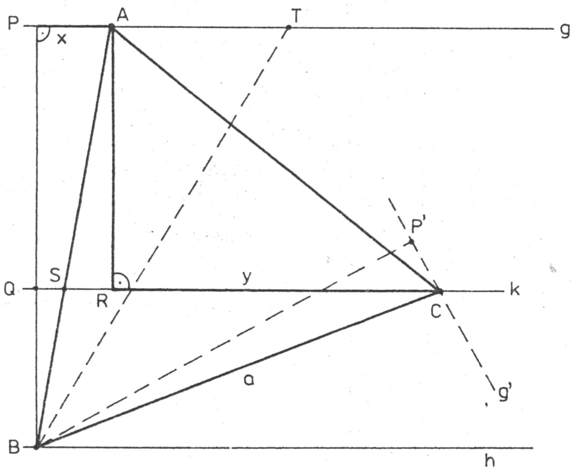


Abb. L. 281045

1 Diese Lageaussage läßt sich aus der Eingangsannahme über ABC herleiten. Jedoch muß eine solche Herleitung hier nicht erfolgen, da sogar insgesamt der in I. ausgeführte Schluß von der Eingangsannahme auf (9) zwar heuristisch nützlich, aber zu einer vollständigen (logisch korrekten) Lösung der Aufgabe nicht erforderlich ist. Verlangt wird vielmehr - außer einer Angabe wie in (9) - nur der in II. ausgeführte umgekehrte Schluß.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$x^2 = a^2 - 64, \tag{4}$$

$$y^2 = a^2 - 25, \tag{5}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 - 9 \tag{6}$$

und damit weiter

$$2xy = a^2 - 9 - (a^2 - 64) - (a^2 - 25) = 80 - a^2, \tag{7}$$

$$4(a^2 - 64)(a^2 - 25) = (80 - a^2)^2, \tag{8}$$

$$a^2(3a^2 - 196) = 0.$$

Wegen $a > 0$ folgt somit, daß die Seitenlänge von ABC erhalten werden kann mit der Maßzahl

$$a = \frac{14}{\sqrt{3}}. \tag{9}$$

II. Wird eine Seitenlänge nach der Angabe (9) erhalten, so folgt umgekehrt: Wegen $196 > 3 \cdot 64$, also $\frac{14}{\sqrt{3}} > 8$ existieren $x, y (> 0)$ mit (4), (5). Für diese gilt wegen (8) und $3 \cdot 80 > 196$, also $80 > (\frac{14}{\sqrt{3}})^2$ auch (7), (6), also sind (1),(2),(3) erfüllt. Wählt man daher B auf h, fällt das Lot BP von B auf g, legt A auf g mit x als Maßzahl von $\overline{PA}$ fest, fällt das Lot AR von A auf k und bestimmt dann C auf k mit y als Maßzahl von $\overline{RC}$ so, daß B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A,R liegen, so besagen (1),(2),(3) nach dem Satz des Pythagoras: ABC ist mit der Maßzahl a der Längen $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ ein gleichseitiges Dreieck, das die geforderten Bedingungen erfüllt.

Anderer Lösungsweg:

Beschreibung einer Konstruktion, durch die eine Länge $\overline{BC}$ erhalten wird:

1. Man wähle einen Punkt B auf h.
2. Man konstruiere die Bildgerade g' von g bei einer Drehung um B mit dem Drehwinkel 60°, z. B. folgendermaßen:
   2.1. Man fälle das Lot BP von B auf g.
   2.2. Man trage an BP in B einen Winkel der Größe 60° an.
   2.3. Auf seinem zweiten Schenkel konstruiere man den Punkt P' mit $\overline{BP'} = \overline{BP}$.
   2.4. Man konstruiere die Senkrechte g' in P' auf BP'.
3. Man konstruiere den Schnittpunkt C von g' mit k.

Beweis, daß ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der so erhaltenen Seitenlänge $\overline{BC}$ die geforderten Bedingungen erfüllt:
Man trage an BP in B denjenigen Winkel an, der in Größe und Drehsinn mit $\sphericalangle P'BC$ übereinstimmt. Sein zweiter Schenkel schneide g in A. Für das so erhaltene Dreieck ABC mit A auf g, B auf h und C auf k gilt dann einerseits

$$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle ABP'} + \overline{\sphericalangle P'BC} = \overline{\sphericalangle ABP'} + \overline{\sphericalangle PBA} = \overline{\sphericalangle PBP'} = 60^{\circ},$$

andererseits wegen $\triangle BP'C \cong \triangle BPA$ (Übereinstimmung in zwei Winkeln und in $\overline{BP'} = \overline{BP}$)

$\overline{BC} = \overline{BA}$;

daher ist $\triangle$ ABC gleichseitig.

<u>Bemerkungen</u> zur Korrektur und zu anderen Lösungsansätzen:

1. Analog zu Teil I. des obigen ersten Lösungsweges kann auch bei konstruktiver Lösung ein vorangestellter heuristischer Ansatz (ausgehend von der Annahme, ABC erfülle die geforderten Bedingungen) zu einer Konstruktionsbeschreibung führen.
2. Als ein solcher Ansatz ist z. B. auch möglich: Aus der Annahme folgt, daß der Schnittpunkt S von k mit AB diese Strecke im Verhältnis 5:3 teilt. Also kann man zunächst eine zu ABCS ähnliche Figur A'B'C'S' konstruieren und (z. B.) den darin auftretenden Winkel $\sphericalangle C'S'A'$ zur Konstruktion von ABCS verwenden.
3. Wird nur ein derartiger zu I. analoger Schluß (und eine anschließende Konstruktionsbeschreibung) ausgeführt, so ist dies noch nicht als vollständige Lösung der Aufgabe ausreichend; denn dieser Schluß erbringt nur einen (nicht geforderten) Eindeutigkeitsnachweis, und der geforderte Nachweis, daß die Bedingungen erfüllt werden, fehlt.
4. Ein solcher Nachweis kann - wie im zweiten Lösungsweg bzw. wie in Teil II. des ersten Lösungsweges - als Schluß in der umgekehrten Richtung erbracht werden.
   Möglich ist aber auch das folgende Vorgehen: Man führt zunächst einen gesonderten Existenzbeweis; durch ihn wird ein in 3. genannter Eindeutigkeitsbeweis, der zur Konstruktionsbeschreibung führt, ergänzt zu einer logisch vollständigen Lösung der Aufgabe.

5. Für einen Existenzbeweis kann man z. B. (nach Festlegung von B und P wie oben) einen Punkt A auf der Geraden g die Strecke von P bis zu einem Punkt T mit $\overline{\sphericalangle PBT} = 30^\circ$ durchlaufen lassen. Die dritte Ecke C eines (wachsenden) gleichseitigen Dreiecks ABC durchläuft dann eine stetige Kurve, die von einem Punkt zwischen g und k bis zu einem Punkt auf h führt, also zwischendurch k schneiden muß.

281046) Lösung: 7 Punkte

Es sei (a,b,c,d) ein beliebiges Quadrupel positiver reeller Zahlen mit $a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$. Durch Anwendung des Satzes von Pythagoras erhält man die Aussage: Zahlen y,z mit

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$

existieren dann, wenn zwei Dreiecke $B_1Q_1P_1$, $C_1Q_1P_1$, beide bei Q_1 rechtwinklig, mit $\overline{B_1P_1} = y$, $\overline{C_1P_1} = z$ und mit der gemeinsamen Seite P_1Q_1 der Länge $\overline{P_1Q_1} = a$ so existieren, daß

$$\overline{B_1Q_1} + \overline{C_1Q_1} = d$$

gilt. Dies ist der Fall (Abb. L 281046 a), wenn es ein Dreieck $B_1C_1P_1$ mit $\overline{B_1P_1} = y$, $\overline{C_1P_1} = z$, $\overline{B_1C_1} = d$ gibt, in dem $\overline{P_1Q_1} = a$ die Länge der auf B_1C_1 senkrechten Höhe P_1Q_1 ist und diese Höhe ihren Fußpunkt Q_1 zwischen B_1 und C_1 hat; diese letzte Bedingung besagt, daß im Dreieck $B_1C_1P_1$ die Innenwinkel bei B_1 und C_1 spitz sind.
Entsprechend gilt: Zahlen z,x mit $\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$ bzw. Zahlen x,y mit $\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$ existieren dann, wenn ein Dreieck $C_2A_2P_2$ mit $\overline{C_2P_2} = z$, $\overline{A_2P_2} = x$, $\overline{C_2A_2} = d$, spitzen Innenwinkeln bei C_2, A_2 und mit der zu C_2A_2 senkrechten Höhe der Länge b existiert, bzw. wenn ein Dreieck $A_3B_3P_3$ mit $\overline{A_3P_3} = x$, $\overline{B_3P_3} = y$, $\overline{A_3B_3} = d$, spitzen Innenwinkeln bei A_3, B_3 und mit der zu A_3B_3 senkrechten Höhe der Länge c existiert. Wegen der Übereinstimmung $\overline{A_2P_2} = \overline{A_3P_3}$, $\overline{B_3P_3} = \overline{B_1P_1}$, $\overline{C_1P_1} = \overline{C_2P_2}$ in diesen Bedingungen gilt somit:

Wenn zu einem Dreieck ABC mit $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AB} = d$ ein Punkt P (in der Ebene oder im Raum) existiert, der von den Geraden durch B,C bzw. durch C,A bzw. durch A,B die Abstände a bzw. b bzw. c hat und für den in allen drei Dreiecken BCP, CAP, ABP die bei A, B und C auftretenden Innenwinkel spitz sind (Abb. L 281046 b), dann existiert ein Tripel (x,y,z), das die drei geforderten Gleichungen erfüllt.

Nun existiert stets sogar in der Ebene durch A,B,C ein Punkt P, der diese Bedingungen erfüllt. Dies kann man folgendermaßen zeigen: Man konstruiere drei von einem Punkt P ausgehende Strahlen, von denen je zwei einen Winkel der Größe 120° miteinander bilden. Auf ihnen trage man Strecken der Länge a,b bzw. c von P aus ab und errichte in deren Endpunkten jeweils die Senkrechte auf dem betreffenden Strahl. Diese drei Senkrechten bilden ein Dreieck ABC, in dem jeder Innenwinkel (nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck) die Größe $360^\circ - 2\cdot 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ hat, das also gleichseitig ist. Ist s seine Seitenlänge, so ist sein Flächeninhalt $F = \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}$ die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BCP, CAP, ABP, also $F = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (a+b+c) = \frac{1}{4} \cdot s \cdot d \cdot \sqrt{3}$. Daher gilt $s = d$, und alle genannten Bedingungen werden von ABC mit P erfüllt.

Anderer Lösungsweg:

Um den geforderten Nachweis zu erbringen, genügt es, jeweils zu $a,b,c > 0$ Zahlen x,y,z anzugeben und für sie die Gleichung

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}(a+b+c) \tag{1}$$

sowie diejenigen beiden anderen Gleichungen zu bestätigen, die aus (1) durch zyklische Vertauschung von a,b,c und von x,y,z hervorgehen. Drei solche Zahlen kann man als

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{b^2+bc+c^2}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{c^2+ca+a^2}, \quad z = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2} \tag{2}$$

angeben; für sie bestätigt man (unter Beachtung von $c + \frac{a}{2} > 0$ und $\frac{a}{2} + b > 0$)

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{\frac{4}{3}(c^2 + ca + \frac{a^2}{4})} + \sqrt{\frac{4}{3}(\frac{a^2}{4} + ab + b^2)}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(c + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b),$$

also (1), sowie die beiden durch zyklische Vertauschung entstehenden Gleichungen.

<u>Bemerkungen:</u>

Eine (wie in der Reihenfolge des ersten Lösungsweges vorgenommene) heuristische Hinführung zu angegebenen x,y,z ist für eine vollständige (logisch korrekte) Lösung der Aufgabe nicht erforderlich.

Zum zweiten Lösungsweg gibt es etwa den heuristischen Ansatz, angeregt durch die Subtrahenden a^2 auf der linken Seite von (1), die Summe a + b + c auf der rechten Seite so in zwei Summanden zu zerlegen, daß von den Gliedern a, b, c nur a zerlegt wird und daß die zyklische Reihenfolge c, a, b eingehalten wird. Damit ist der Versuch motiviert, (1) durch Lösen der beiden einzelnen Gleichungen

$$\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{2}{3}\left(c + \frac{a}{2}\right) \text{ und } \sqrt{z^2 - a^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2} + b\right)$$

zu erfüllen. Dieser Versuch führt, zusammen mit zyklischer Vertauschung, zu (2).

Theoretisch möglich ist auch, nach Beseitigung der Wurzeln mit Verfahren der nichtlinearen Algebra etwa y, z zu eliminieren und dann Teiler des entstehenden Polynoms zu ermitteln. Jedoch ist dieser Weg mit außerordentlich hohem Aufwand verbunden. Zur Einschätzung unvollständiger Lösungsversuche ist daher zu berücksichtigen, daß beispielsweise für ein bloßes Beseitigen von Wurzeln wegen der danach noch anstehenden Anforderungen keine Punkte zu vergeben sind.

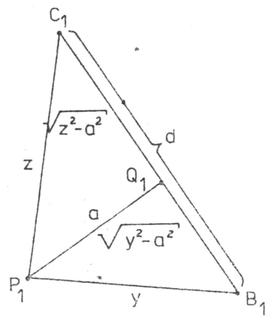


Abb. L 281046 a

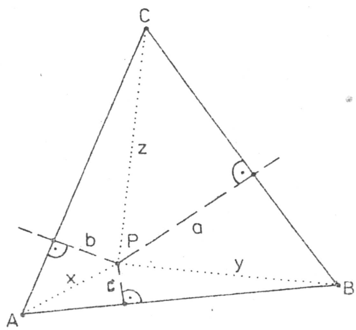


Abb. L 281046 b