XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

281031

Für jede natürliche Zahl n werde ihre Zifferndarstellung mit der Basis 2 (Darstellung als Dualzahl), ferner ihre Zifferndarstellung mit der Basis 3 usw. ..., schließlich ihre Zifferndarstellung mit der Basis 10 (Darstellung als Dezimalzahl) betrachtet.

Wenn es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, bei denen in jeder dieser Zifferndarstellungen (mit den Basen 2, 3, 4, ..., 10) die letzte Ziffer (Einerziffer) eine 1 ist, so ermittle man die kleinste derartige natürliche Zahl n.

281032

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(f; g)$ von Funktionen f und g, die für alle reellen Zahlen definiert sind und die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) f ist eine quadratische Funktion, in deren Darstellung $y = f(x)$ der bei x^2 stehende Koeffizient 1 beträgt.

(2) Für alle reellen x gilt $f(x+1) = g(x)$.

(3) f hat genau eine reelle Nullstelle.

(4) Es gilt $g(5) = 4$.

A 10;I

281033

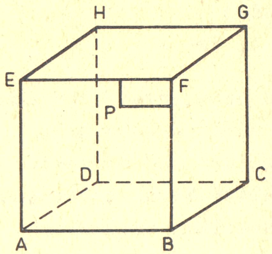

Abb. A 281033
(verkleinerter Maßstab)

Es sei ABCDEFGH ein Würfel der Kantenlänge 6 cm. Auf der Seitenfläche ABFE sei P der jenige Punkt, der von EF den Abstand 1 cm und von BF den Abstand 2 cm hat (siehe Abb. A 281033). Ermitteln Sie die Menge M aller derjenigen Punkte auf der Oberfläche des Würfels, die von P aus erreichbar sind, jeweils längs eines auf der Oberfläche verlaufenden Weges, der höchstens die Länge 4 cm hat!

Hinweis: Die gesuchte Menge M ist als Vereinigungsmenge von Flächenstücken auf den einzelnen Seitenflächen des Würfels nachzuweisen. Jedes dieser Flächenstücke ist durch Angabe seiner Randkurve zu beschreiben; die Beschreibung ist so anzulegen, daß sie die Möglichkeit einer konstruktiven Gewinnung der einzelnen Teile solcher Randkurven vermittelt.

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

281034

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a; b) reeller Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen!

$$a^3 - b^3 - a^2 + b^2 + a - b = 0 \qquad (1)$$

281035

Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm, $s = 16{,}8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50^\circ$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.
(2) Die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $a = \overline{BC}$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe γ.

I. Beweisen Sie, daß jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, daß jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Zahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenannten Fall diese Zahl!

281036

Beweisen Sie die folgende Aussage!
Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ gibt es eine $(n+2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.

<u>Hinweis:</u> Die Verwendung eines - nicht programmierbaren - Taschenrechners ist gestattet.

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

281031) Lösung: 6 Punkte

Die Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl n bei Zugrundelegung der Basis b hat genau dann als letzte Ziffer eine 1, wenn n bei Division durch b den Rest 1 läßt. Das trifft genau dann zu, wenn n-1 durch b teilbar ist. Also enthält die Menge, in der (wenn sie nicht leer ist) die kleinste Zahl zu ermitteln ist, genau diejenigen natürlichen Zahlen $n > 1$, für die $n-1$ durch jede der Zahlen 2, 3, 4, ..., 10 teilbar ist. Diese Teilbarkeitsbedingungen werden genau dann erfüllt, wenn $n-1$ durch das k.g.V. der Zahlen 2, 3, 4, ..., 10, d. h. durch die Zahl $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$ teilbar ist.
Die kleinste natürliche Zahl $n > 1$, für die das zutrifft, ist die Zahl $n = 2521$.

281032) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn ein Paar (f; g) von Funktionen die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:
Nach (1) gibt es reelle Zahlen p und q mit

$$f(x) = x^2 + px + q \tag{5}$$

für alle x. Aus (2) folgt dann für alle x

$$g(x) = (x+1)^2 + p(x+1) + q, \tag{6}$$

$$g(x) = x^2 + (p+2)x + p + q + 1. \tag{7}$$

Aus (3) folgt, daß in der Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$$ (für die quadratische Gleichung

$x^2 + px + q = 0$) der Radikand 0 ist, also

$$p^2 - 4q = 0 \tag{8}$$

gilt. Aus (6) und (4) folgt $6^2 + 6p + q = 4$, also

$$q = -6p - 32. \tag{9}$$

Setzt man dies in (8) ein, so erhält man

$$p^2 + 24p + 128 = 0;$$

also ist p eine der Zahlen

$$p_{1;2} = -12 \pm \sqrt{144 - 128},$$

d. h. $p_1 = -8; \quad p_2 = -16.$ (10)

Nach (9) gehören hierzu als Werte von q

$$q_1 = 16; \quad q_2 = 64. \tag{11}$$

Nach (5) und (7) ist somit (f; g) eines der Paare $(f_1; g_1)$, $(f_2; g_2)$ von Funktionen, die für alle x durch

$$f_1(x) = x^2 - 8x + 16, \quad g_1(x) = x^2 - 6x + 9; \tag{12}$$

$$f_2(x) = x^2 - 16x + 64, \quad g_2(x) = x^2 - 14x + 49 \tag{13}$$

definiert sind.

II. Diese Paare erfüllen (1) und, wie sich bereits bei der Ermittlung der g_i in (12), (13) ergab, auch (2). Ferner bestätigt man (3), entweder indem man (8) für (10) und (11) oder direkt 4 bzw. 8 als einzige Nullstelle von f_1 bzw. f_2 nachweist. Schließlich bestätigt man mit $g_1(5) = 25 - 30 + 9 = 4$ und $g_2(5) = 25 - 70 + 49 = 4$ auch (4).

Damit ist bewiesen, daß genau die in (12) und (13) angegebenen Paare den Bedingungen der Aufgabe genügen.

<u>281033) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Zur Angabe von Flächenstücken in einer Seitenfläche f des Würfels (oder einer Bildfläche f hiervon) bezeichne stets $\widehat{XY}Z$ das Flächenstück mit derjenigen Randkurve, die aus dem in f enthaltenen Bogen $\widehat{XY}$ eines zuvor angegebenen Kreises und den Strecken YZ, ZX besteht. Entsprechend sei die Bezeichnungsweise $\widehat{XY_1}\widehat{Y_2}Z$ verwendet.

Die gesuchte Menge M läßt sich in folgenden Schritten ermitteln (siehe Abb. L 281033):

(0) In der Fläche ABFE sind (mindestens) alle diejenigen Punkte auf die geforderte Weise erreichbar, die der Kreisfläche K um P mit dem Radius r = 4 cm angehören. Die Kreislinie k um P mit r

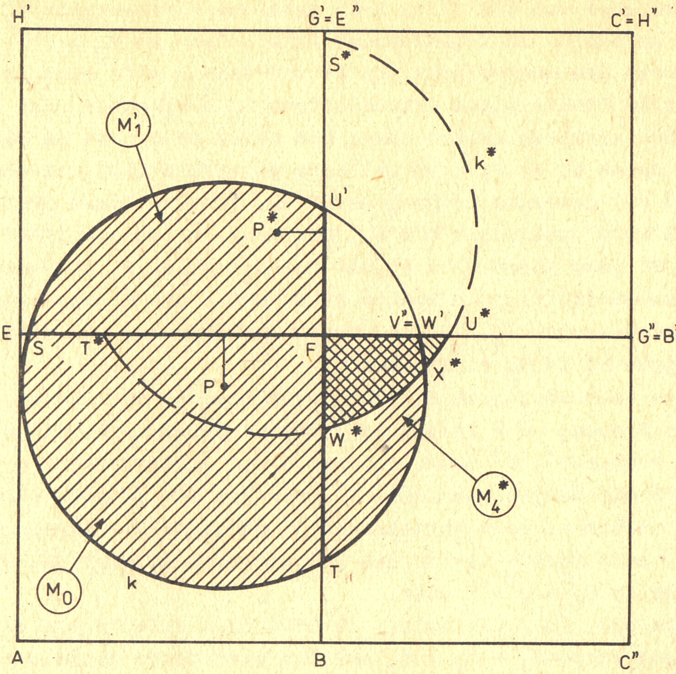

Abb. L 281033

schneidet EF in einem Punkt S und BF in einem Punkt T. Die Punkte in ABFE, die der Kreisfläche K angehören, bilden dann das Flächenstück $M_0 = \overset{\frown}{TSF}$.

(1) Durch Überqueren der Strecke EF sind in der Fläche EFGH alle Punkte eines Flächenstückes M_1 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann: Man drehe die Fläche EFGH um EF in die durch A, B, F, E gehende Ebene e in die Lage EFG'H' außerhalb ABFE. Dann schneidet k die Strecke FG' in einem Punkt U'. Die Punkte in EFG'H', die der Kreisfläche K angehören, bilden das Flächenstück $M_1' = \overset{\frown}{SU'}F$. Durch Zurückdrehen von EFG'H' in EFGH geht U' in einen Punkt U und damit $\overset{\frown}{SU'}$ in einen Kreisbogen $\overset{\frown}{SU}$ sowie M_1' in das Flächenstück $M_1 = \overset{\frown}{SU}F$ über.

(2) Durch Überqueren von BF sind in BFGC alle Punkte eines Flächenstücks M_2 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann: Man drehe BFGC um BF in die Ebene e in die Lage BFG"C" außerhalb

ABFE. Dann schneidet k die Strecke FG" in einem Punkt V". Durch Zurückdrehen von BFG"C" in BFGC geht das Flächenstück $M_2'' = \widehat{TV''F}$ aller in BFG"C" zu K gehörenden Punkte über in $M_2 = \widehat{TVF}$.

(3) Durch Überqueren erst von EF und dann von FG sind in BFGC auch alle Punkte eines Flächenstücks M_3 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann: Man drehe BFGC erst um FG in die Ebene durch E, F, G, H in die Lage außerhalb EFGH und wende dann die in (1) genannte Drehung um EF an. Dadurch kommt BFGC in die Lage B'FG'C' außerhalb EFG'H'. Der Kreis k schneidet FB' in einem Punkt W' (der wegen B' = G" mit dem schon in (2) genannten Punkt V" zusammenfällt). Die Punkte in B'FG'C', die K angehören, bilden das Flächenstück $M_3' = \widehat{U'W'}F$. Durch Zurückdrehen von B'FG'C' in BFGC geht M_3' in $M_3 = \widehat{UW}F$ über.

(4) Man kann aber auch B'FG'C' durch eine in der Ebene e ausgeführte Drehung um F in die Lage BFG"C" bringen. Dabei gehen U', W' in Punkte U^*, W^* über. Dies sind die Schnittpunkte von FG" bzw. FB mit demjenigen Kreis k^*, der bei der genannten Drehung aus k entsteht. Sein Mittelpunkt R^* entsteht bei dieser Drehung aus P, sein Radius ist r. Das Flächenstück M_3' geht bei dieser Drehung in $M_3^* = \widehat{U^*W^*}F$ über.

(5) Aus (2), (3), (4) folgt: In BFGC sind alle Punkte der Vereinigungsmenge $M_4 = M_2 \cup M_3$ auf die geforderte Weise erreichbar. Da die Kreise k und k^* in BFG"C" genau einen Schnittpunkt X^* haben, ergibt sich eine Vereinigungsmenge $M_4^* = M_2'' \cup M_3 = \widehat{TX^*}\widehat{U^*}F$. Geht bei dem Zurückdrehen von BFG"C" in BFGC der Punkt X^* in X über, so geht M_4^* in $M_4 = \widehat{TX}\widehat{U}F$ über.

(6) Durch Überqueren erst von EF, dann von FG und dann von BF sind in ABFE keine neuen Punkte mehr erreichbar. Dies ist daraus ersichtlich, daß die Menge $\widehat{T^*W^*}F$ aller in ABFE zur Kreisfläche K^* um P^* mit r gehörenden Punkte bereits in M_0 liegt. Ebenso folgt: Durch Überqueren erst von BF, dann von FG sind in EFGH keine neuen Punkte mehr erreichbar; denn man kann EFG'H' durch die in (5) genannte Drehung in die Lage E"FG"H" bringen; dabei geht M_1' in die Menge $\widehat{S^*U^*}F$ aller in E"FG"H" zu K^* gehörenden Punkte über, auch in ihr liegen bereits alle in E"FG"H" zu K gehörenden Punkte (die wegen G"FE"H" = B'FG'C' das schon in (3) genannte Flächenstück M_3' bilden). Damit ist auch gezeigt, daß durch weiter fortgesetztes Überqueren von Kanten keine neuen Punkte mehr erreichbar sind.

Die gesuchte Menge ist also die Vereinigungsmenge der in (0), (1) und (5) durch Angabe ihrer Randkurven und deren konstruktiver Gewinnung beschriebenen Flächenstücke M_0, M_1 und M_4.

Bemerkung zur Korrektur:
Die Überlegungen zur Gewinnung der Flächenstücke M_0, M_1, M_4 sowie zum Vollständigkeitsnachweis (6) dürfen in der Darstellung nicht fehlen; jedoch kann statt einer weitgehend auf verbale Definitionen gestützten Lösungsdarstellung auch ein Vorgehen mit stärkeren Verweisen auf Abbildungen akzeptiert werden.

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

281034) Lösung: **6 Punkte**

Für alle reellen Zahlen a, b gilt

$$a^3-b^3-a^2+b^2+a-b = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2-a-b+1)$$
$$= (a-b)\cdot\tfrac{1}{2}((a+b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2) \qquad (2)$$

und $(a+b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0.$ (3)

Es gilt sogar stets

$$(a+b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 > 0; \qquad (4)$$

denn wenn in (3) das Gleichheitszeichen gelten würde, so müßten die drei Gleichungen $a + b = 0$, $a - 1 = 0$, $b - 1 = 0$ gelten, die jedoch einen Widerspruch bilden.
Aus (2) und (4) folgt: Die Gleichung (1) wird genau von allen denjenigen Paaren (a; b) erfüllt, für die a = b gilt.

281035) Lösung: **7 Punkte**

I. Wenn ein Dreieck ABC die genannten Bedingungen erfüllt, so folgt:
Für den Mittelpunkt M des Umkreises gilt nach (1)

$$\overline{MA} = \overline{MB} = r$$

sowie nach (3) und dem Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz

$$\overline{\sphericalangle AMB} = 2\gamma.$$

Der Punkt C liegt einerseits auf dem Umkreis k_1, andererseits auf dem Kreis k_2 um B mit dem Radius a; dabei gilt nach (2)

$$a = s - \overline{AB}.$$

Damit ist bewiesen, daß jedes Dreieck, das (1), (2), (3) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann (siehe Abb. L 281035):

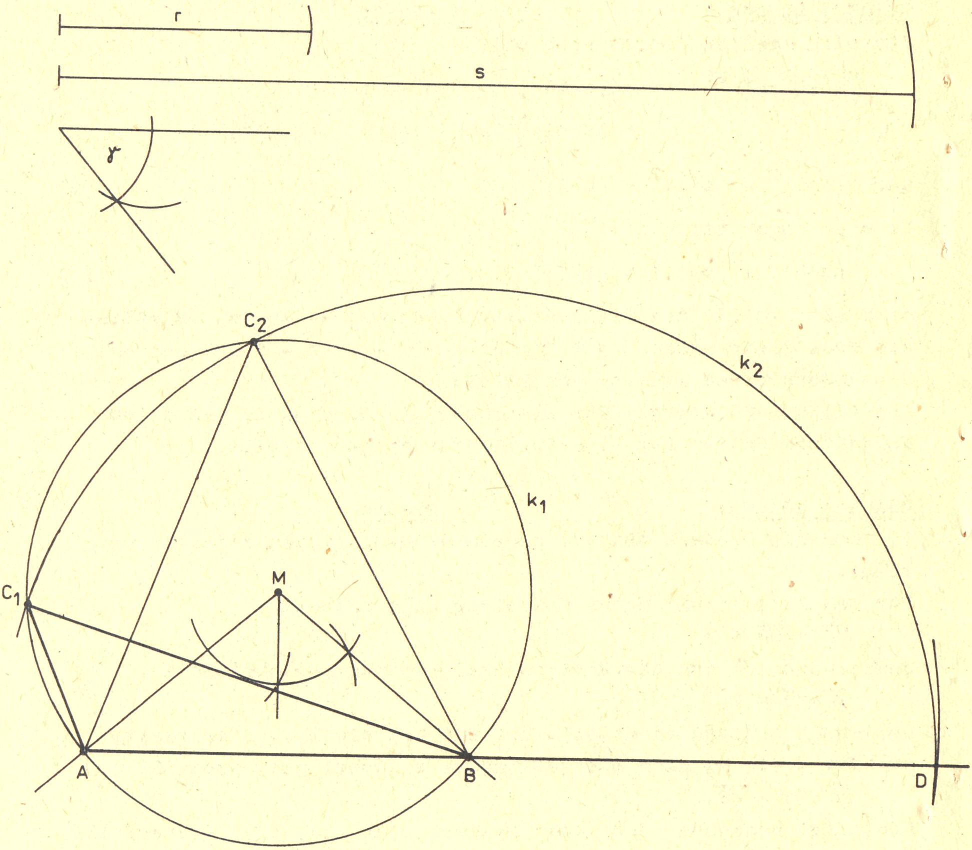

Abb. L 281035

II.

1. Man konstruiert einen Winkel der Größe 2γ; sein Scheitel sei M.
2. Man konstruiert den Kreis k_1 um M mit r, er schneidet die Schenkel des in 1. konstruierten Winkels in A bzw. B.
3. Man konstruiert die Länge $a = s - \overline{AB}$ (z. B. indem man den Kreis um A mit s konstruiert, ihn mit dem von A aus durch B gehenden Strahl zum Schnitt D bringt und damit $a = \overline{BD}$ erhält).
4. Man konstruiert den Kreis k_2 um B mit a. Er schneidet[1] den Kreis k_1 in zwei Punkten C_1, C_2; jeder von ihnen kann als Endpunkt C in einem damit konstruierten Dreieck ABC genommen werden.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen (1), (2), (3) genügt: Nach Konstruktionsschritt 2. und 4. liegen A, B und sowohl C_1 als auch C_2 auf einem Kreis mit dem Radius r, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 3. und 4. gilt (wieder sowohl für $C = C_1$ als auch für $C = C_2$) $\overline{BC} = s - \overline{AB}$, also $\overline{AB} + \overline{BC} = s$; d. h., (2) ist erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 1., 2. und 4. und dem Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz gilt auch $\overline{\sphericalangle ACB} = \frac{1}{2} \; \overline{\sphericalangle AMB} = \gamma$, also (3).

---

1 Dies kann entweder der durchgeführten Konstruktion (Abb. L 281035) entnommen oder aber z. B. mit Hilfe des Satzes bewiesen werden, daß zwei Kreise k_1, k_2 mit Mittelpunkten M_1, M_2 und Radien r_1, r_2 sich genau dann in zwei Punkten schneiden, wenn $|r_1-r_2| < \overline{M_1M_2} < r_1+r_2$ gilt. Hier ist nämlich $M_1 = M$, $M_2 = B$, also $\overline{M_1M_2} = r = 5$ cm sowie $r_1 = r = 5$ cm und $r_2 = s - \overline{AB}$. Nun gilt einerseits $\overline{AB} < \overline{AM} + \overline{MB} = 10$ cm, also $r_2 = 6{,}8$ cm; andererseits zeigt ein Vergleich von $\triangle AMB$ mit einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck der Kathetenlänge r, daß $\overline{AB} > r\sqrt{2} = \sqrt{50}$ cm > 7 cm, also $r_2 < 9{,}8$ cm gilt. Somit ist wegen $|r_1-r_2| = r_2-r_1 < 4{,}8$ cm $< \overline{M_1M_2} < 11{,}8$ cm $< r_1+r_2$ der genannte Satz anwendbar.

IV. Die Konstruktionsschritte 1., 2., 3. sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt 4. führt, wie oben bemerkt, auf zwei Dreiecke ABC_1, ABC_2. Für sie gilt[1] $\overline{\sphericalangle ABC_1} \neq \overline{\sphericalangle ABC_2}$, also sind $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$ nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen:

Es gibt bis auf Kongruenz genau zwei Dreiecke der verlangten Art.

281036) Lösung: 7 Punkte

Für n = 1, 2, ..., 6 erfüllen z. B. die Zahlen

$$
\begin{aligned}
364 &= 52 \cdot 7, \\
3346 &= 478 \cdot 7, \\
34363 &= 4909 \cdot 7, \\
333634 &= 47662 \cdot 7, \\
3333463 &= 476209 \cdot 7, \\
33333643 &= 4761949 \cdot 7
\end{aligned}
$$

die geforderten Bedingungen.

Da ferner 333333 = 47619 • 7 durch 7 teilbar ist, ergibt sich jeweils aus einer Zahl, die für ein n die Bedingungen erfüllt, durch Davorsetzen von sechs Ziffern 3 eine Zahl, die die Bedingungen für n + 6 statt n erfüllt.

Damit ist bewiesen, daß für jedes natürliche $n \geq 1$ eine Zahl existiert, die die geforderten Bedingungen erfüllt, w.z.b.w.

Bemerkungen:

1. Als Taschenrechner-Ergebnisse sind natürlich nur endlich viele Zahlenwerte (auf die ein Beweistext zurückgreift) möglich; ein Nachweis für alle $n \geq 1$ erfordert also grundsätzlich noch andere (theoretische) Hilfsmittel.
2. Ein relativ praktikables Probierverfahren mit dem SR 1 besteht z. B. darin, unter Nutzung der Wiederholungsautomatik durch ständiges Addieren von 7 (aus geeigneten Anfangszahlen wie etwa 343 bzw. 33341, ..., bzw. 33333342) Vielfache von 7 herzustellen und sofort mit Blick-Kontrolle auf das Vorkommen von Ziffern 3, 4, 6 zu prüfen. (Sucht man hierzu als eine der Anfangszahlen die größte durch 7 teilbare Zahl unter 33333346, so kann man bei dieser Gelegenheit auch gleich die Teilbarkeit von 333333 durch 7 bemerken.)

---

1 Dies kann entweder der durchgeführten Konstruktion entnommen oder aber z. B. mit Hilfe des Satzes bewiesen werden, daß die Verbindungsgerade der Kreismittelpunkte M, B die Schnittsehne C_1C_2 halbiert. Danach (und weil A nicht auf dieser Verbindungsgeraden liegt) ist nämlich einer der beiden Winkel $\sphericalangle ABC_1$, $\sphericalangle ABC_2$ größer, der andere kleiner als $\sphericalangle ABM$.

3. Für n = 6 erfüllen außer den obengenannten Zahlen auch genau die Zahlen

6433,
46333, 63343,
336343, 343336, 363433, 433363, 634333,
3364333, 3433633, 3633343, 4333336, 6333334,
33334336, 33436333, 33633334, 34633333, 36334333, 43333633

die Bedingungen.

(Mit einem - in der Klausur nicht zugelassenen - programmierbare Rechner sind die Zahlen z. B. durch folgendes BASIC-Programm zu erhalten:

```
1 DIM A (8): FOR N=1 TO 6: FOR I=1 TO N+2: A(I) = 4
2 FOR J=1 TO N+2: IF J=I THEN 7
3 A(J) = 6: FOR K=1 TO N+2: IF K=I OR K=J THEN 5
4 A (K)= 3
5 NEXT K: F=.1: Z=Ø: FOR K=1 TO N+2: F= 1Ø* F: Z=Z+F*A(K)
6 Next K: Q=Z/7: IF Int (Q) = Q THEN Print Z;
7 Next J, I, N
```

Klasse 10: Aufgaben 281031 bis 281036

1. Zusammenhang: Letzte Ziffer 1/Teilbarkeit von n – 1 durch die Basis 2
   Zusammenhang: Teilbarkeitsbedingungen für 2,...,10/Teilbarkeitsbedingung für das k.g.V. 3
   Abschließende Ermittlung von n 1
   6

2. Nutzung der Aussagen (1) bis (4) zur Gewinnung von Bedingungen für die (Koeffizienten der) gesuchten Funktionen:
   Einer dieser Schritte 2
   die übrigen je 1 P 3
   Bestätigung von (1) bis (4) für die gefundenen Funktionen .. 1
   6

3. Gewinnung des Flächenstücks M_0 1
   Gewinnung des Flächenstücks M_1 2
   Gewinnung des Flächenstücks M_4 3
   Vollständigkeitsbetrachtungen 2
   8

   Hinweis: Druckfehler im Lösungstext S. 4, Z. 16 v.u.:
   Statt M_3 setze M_3^*

   Z. 7. v.u.: Statt (5) setze (4)

4. Rechnerische Umformungen (Gewinnung äquivalenter Gleichungen) 3
   Nutzung von Ungleichungsaussagen 3
   6

5. I. Anwendung des Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satzes (oder eines gleichwertigen Hilfsmittels) ,........................ 1
   Nutzung der Bedeutung von s = a + c 1
   II. Ausreichende (textliche) Konstruktionsbeschreibung 2
   III. Nachweis, daß die geforderten Bedingungen erfüllt sind. 1
   IV. Nachweis zweier inkongruenter Dreiecke 2
   7

   (Bei anderer Lösungsanlage können Teilschritte aus III., IV. auch durch Ausführungen in I., II. mit erfaßt sein; dementsprechend sind die Punkte zu vergeben.)

   Hinweis: Druckfehler im Lösungstext S. 3, Fußnote, Z. 6 v.u.:
   Statt $r_2 < 6{,}8$ cm setze $r_2 > 6{,}8$ cm

6. Nachweis der geforderten Bedingungen für einzelne konkret angegebene Zahlen: Bis zu 3
   Beweis für alle natürlichen Zahlen:
   Vorliegen eines stichhaltigen Beweismotivs (z.B. wiederholtes Davorsetzen der Ziffernfolge 333333) 2
   Ausführung des Beweises: Die restlichen Punkte, im Beispiel also 2
   7

Hinweis: Druckfehler im Lösungstext
S. 5, Z. 1: Statt n = 6 setze $n \leq 6$
Z. 9: Statt programmierbare setze programmierbaren

Z. 2,1 v.u.: Die BASIC-Schlüsselwörter NEXT, INT, PRINT sind mit großen Buchstaben zu schreiben