XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>281021</u>

Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und die durch 450 teilbar ist.

<u>281022</u>

Weisen Sie nach, daß es genau eine quadratische Funktion f gibt, die die Bedingung

$$\frac{f(x) + f(x+2)}{6} = x^2 - 3 \qquad (*)$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt, und daß diese Funktion zwei ganzzahlige Nullstellen hat!

<u>281023</u>

Über einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 werde vorausgesetzt, daß k_2 durch M_1 geht, aber nicht ganz in der Fläche des Kreises k_1 liegt. Derjenige Schnittpunkt von k_1 mit der Geraden g durch M_1,M_2, der dann im Innern von k_2 liegt, sei S. Ferner sei P_2 einer der Schnittpunkte, die k_2 mit der in S auf g errichteten Senkrechten hat.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets folgende Aussage gilt:

Diejenige von P_2 an k_1 gelegte Tangente t, die k_1 in einem von S verschiedenen Punkt P_1 berührt, ist auch Tangente an k_2.

A 10

281024

Gegeben sei ein Halbkreis. Gesucht sind Vierecke, die die folgenden Bedingungen (1) bis (3) erfüllen:

(1) Zwei Eckpunkte des Vierecks liegen auf dem Durchmesser des Halbkreises, die beiden anderen Eckpunkte liegen auf dem Halbkreisbogen.

(2) Das Viereck ist ein Rechteck.

(3) Seine Seitenlängen verhalten sich wie $\sqrt{3}: 2$.

a) Beschreiben Sie eine Konstruktion, durch die man zwei verschiedene Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $P_2Q_2R_2S_2$ erhält!

b) Führen Sie die beschriebene Konstruktion aus!

c) Beweisen Sie, daß die nach Ihrer Beschreibung konstruierten Vierecke die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen!

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

281021) Lösung: 10 Punkte

Für natürliche Zahlen, deren Zifferndarstellung nur aus Ziffern 0 und 1 besteht, gilt:

1. Eine solche Zahl ist genau dann positiv, wenn die Anzahl der Ziffern 1 nicht Null ist.
2. Sie ist genau dann durch 450 teilbar, wenn sie durch 9 und durch 50 teilbar ist, da 9 und 50 zueinander teilerfremd sind.
3. Sie ist genau dann durch 50 teilbar, wenn ihre Zifferndarstellung auf ...00 endet (da die Teilbarkeit durch 50 äquivalent damit ist, daß die Zahl auf ...00 oder ...50 endet, hier aber nur Ziffern 0 und 1 vorkommen dürfen).
4. Sie ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist; ihre Quersumme ist aber gleich der Anzahl der Ziffern 1 in der Zifferndarstellung der Zahl.

Die Zifferndarstellung der kleinsten Zahl, die alle diese Bedingungen erfüllt, besteht folglich aus (der kleinsten von Null verschiedenen durch 9 teilbaren Anzahl, d. i.) genau neun Ziffern 1 und zwei anschließenden Ziffern 0. Das heißt, die gesuchte Zahl lautet 11111111100.

281022) Lösung: 10 Punkte

I. Wenn eine quadratische Funktion f, d. h. eine mit reellen $a \neq 0$, b, c durch

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

für alle reellen x definierte Funktion f, die Bedingung (*) erfüllt, so folgt: Wegen

$$f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c$$
$$= ax^2 + 4ax + bx + 4a + 2b + c,$$

also $f(x) + f(x+2) = 2ax^2 + 2(2a+b)x + 2(2a+b+c)$,

gilt für alle reellen x die Gleichung $f(x)+f(x+2)=6x^2-18$,

d. h. die Gleichung

$$2ax^2+2(2a+b)x+2(2a+b+c) = 6x^2+0\cdot x -18. \qquad (**)$$

1. Fortsetzungsmöglichkeit:

Durch Koeffizientenvergleich (d. h. nach dem Satz, daß aus einer für alle reellen x geltenden Gleichung

$$a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 = b_nx^n+\ldots+b_1x +b_0$$

die Gleichungen $a_i = b_i$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ folgen) ergeben sich aus (**) die Gleichungen

$$2a = 6,$$
$$2(2a+b) = 0,$$
$$2(2a+b+c) = -18.$$

Aus ihnen folgt $a = 3$, $b = -6$, $c = -9$.

2. Fortsetzungsmöglichkeit:

Da (**) auch (z. B.) für $x = 0$, für $x = 1$ und für $x = -1$ gilt, folgt

$$2(2a+b+c) = -18,$$
$$2a + 2(2a+b) + 2(2a+b+c) = -12,$$
$$2a - 2(2a+b) + 2(2a+b+c) = -12.$$

Aus diesen Gleichungen folgt $a = 3$, $b = -6$, $c = -9$.

Also kann nur die durch

$$f(x) = 3x^2 - 6x -9$$

definierte Funktion die Bedingung (*) erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Bedingung; denn für alle reellen x gilt

$$\frac{f(x) + f(x+2)}{6} = \frac{1}{6}\left(3x^2 -6x -9 +3(x+2)^2 -6(x+2) -9\right)$$
$$= x^2 -3.$$

Mit I. und II. ist der erste geforderte Nachweis geführt.

Die Gleichung $f(x) = 0$, d. h.

$$3x^2 -6x -9 = 0,$$

hat genau die Lösungen

$$x_{1,2} = 1 \pm\sqrt{1+3},$$

d. h. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Da dies zwei ganze Zahlen sind, ist damit auch der zweite geforderte Nachweis geführt.

281023) Lösung: 10 Punkte

Nach Voraussetzung gilt $\overline{\sphericalangle M_1SP_2} = 90^\circ$

sowie nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius

$$\overline{\sphericalangle M_1P_1P_2} = 90^\circ. \qquad (1)$$

Hieraus sowie aus $\overline{M_1S} = \overline{M_1P_1}$ (Radien von k_1)

und $\overline{M_1P_2} = \overline{M_1P_2}$

folgt $\Delta M_1SP_2 \cong \Delta M_1P_1P_2$.

(Kongruenzsatz sSW; dieser ist anwendbar, da in diesen Dreiecken die Seite M_1P_2 dem rechten Winkel gegenüberliegt, also die größte Seite ist. Man kann auch den Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte $\overline{P_2S} = \overline{P_2P_1}$ zitieren und dann den Kongruenzsatz sss anwenden). Daher gilt

$$\overline{\sphericalangle P_2M_1S} = \overline{\sphericalangle P_2M_1P_1}. \qquad (2)$$

Da ferner $\overline{M_2M_1} = \overline{M_2P_2}$ (Radien von k_2)

gilt, folgt nach dem Basiswinkelsatz*

$$\overline{\sphericalangle P_2M_1S} = \overline{\sphericalangle M_1P_2M_2}. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt $\overline{\sphericalangle P_2M_1P_1} = \overline{\sphericalangle M_1P_2M_2}$ und daraus nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes

$$M_1P_1 \parallel M_2P_2.$$

Daher und wegen (1), d. h. $M_1P_1 \perp t$, ist auch

$$M_2P_2 \perp t.$$

Nach der Umkehrung des Satzes über Tangente und Berührungsradius folgt daraus, wie behauptet, daß t auch Tangente an k_2 ist.

Bemerkung: Der Beweis verläuft ohne jede Änderung für die folgenden drei Fälle:
(1) S ist innerer Punkt von M_1M_2 (Abb. L 281023a),
(2) S ist äußerer Punkt von M_1M_2 (Abb. L 281023b),
(3) $S = M_2$ (Abb. L 281023c).
Die Aufzählung dieser drei Fälle und eine Ausführung von (drei derartigen) Abbildungen wird nicht vom Schüler verlangt.

*Es gilt $\overline{\sphericalangle P_2M_1S} = \overline{\sphericalangle P_2M_1M_2}$, da aus den Voraussetzungen folgt, daß S auf dem Strahl aus M_1 durch M_2 liegt. Vom Schüler wird nicht verlangt, dies auszuführen.

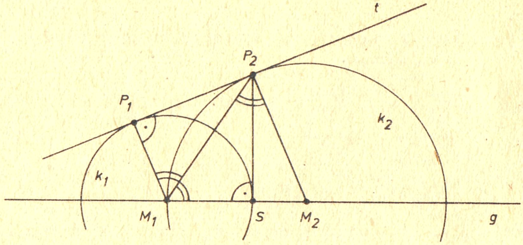

Abb. L 281023a

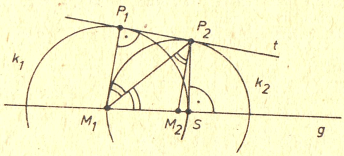

Abb. L 281023b

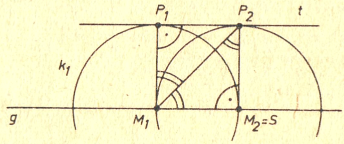

Abb. L 281023c

<u>281024) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

a) Der Durchmesser des Halbkreises sei AB, sein Mittelpunkt M, die Gerade durch A und B sei g, der Halbkreis h.

Man konstruiert zunächst folgendermaßen ein Rechteck EFGH:

(4) Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck EFK (mit beliebiger Seitenlänge).

(5) Die Parallele durch K zu EF schneidet die in E und F auf EF errichteten Senkrechten in H bzw. G.

Man konstruiert dann folgendermaßen ein Viereck $P_1Q_1R_1S_1$:

(6) Der Kreis um M mit $\frac{1}{2}\overline{EF}$ schneidet g in E_1 und F_1; man konstruiert auf derjenigen Seite von g, auf der h liegt, das zu EFGH kongruente Rechteck $E_1F_1G_1H_1$.

(7) Die Strahlen aus M durch G_1 bzw. H_1 schneiden h in R_1 bzw. S_1; man konstruiert die Lote R_1Q_1 bzw. S_1P_1 von R_1 bzw. S_1 auf g.

Schließlich konstruiert man folgendermaßen ein Viereck $P_2Q_2R_2S_2$:

(8) Der Kreis um M mit $\frac{1}{2}\overline{FG}$ schneidet g in F_2 und G_2; man konstruiert auf derjenigen Seite von g, auf der h liegt, das zu FGHE kongruente Rechteck $F_2G_2H_2E_2$.

(9) Die Strahlen aus M durch H_2 bzw. E_2 schneiden h in R_2 bzw. S_2; man konstruiert die Lote R_2Q_2 bzw. S_2P_2 von R_2 bzw. S_2 auf g.

b) Konstruktion: Abbildung L 281024a,b,c.

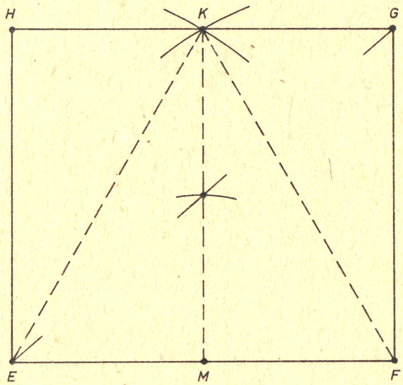

Abb. A 281024a

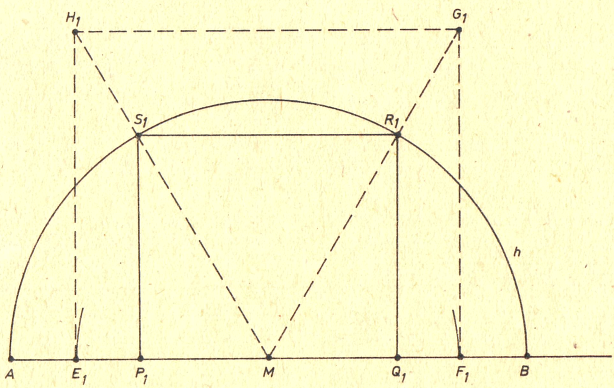

Abb. A 281024b

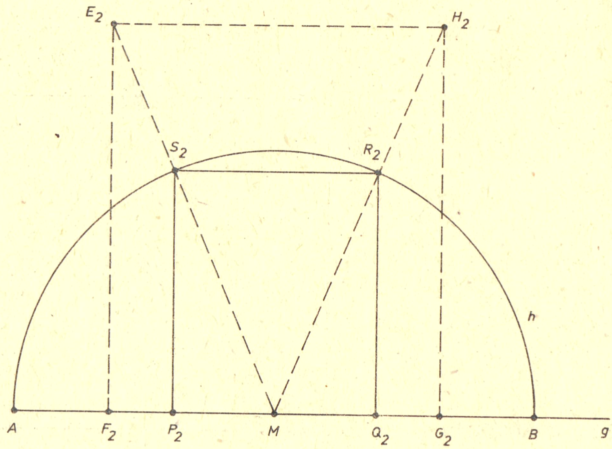

Abb. A 281024c

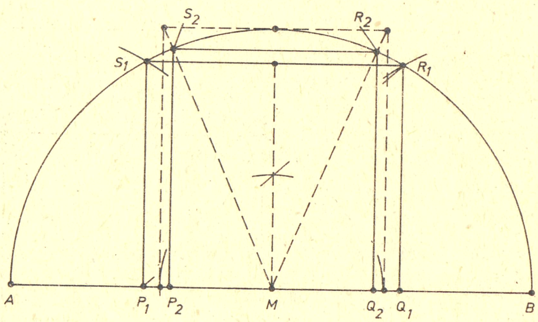

Abb. A 281024d

c) Beweis, daß $P_1Q_1R_1S_1$ die Bedingungen (1) bis (3) erfüllt:
Das nach (5) konstruierte Rechteck EFGH hat als Seitenlänge $\overline{FG}$ die Höhenlänge des nach (4) konstruierten gleichseitigen Dreiecks EFK. Daher gilt $\overline{FG}:\overline{EF} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\overline{EF}:\overline{EF} = \sqrt{3}:2$.

Nach (6) ist $\overline{\sphericalangle ME_1H_1} = \overline{\sphericalangle MF_1G_1} = 90^\circ$ und $\overline{E_1H_1} = \overline{F_1G_1}$ (Winkel bzw. Gegenseiten im Rechteck $E_1F_1G_1H_1$) sowie $\overline{ME_1} = \overline{MF_1} = \frac{1}{2}\overline{EF}$.
Damit folgt $\triangle ME_1H_1 \cong \triangle MF_1G_1$ (sws), also $\overline{\sphericalangle E_1MH_1} = \overline{\sphericalangle F_1MG_1}$.
Wegen (7) besagt dies auch $\overline{\sphericalangle P_1MS_1} = \overline{\sphericalangle Q_1MR_1}$.
Nach (7) liegen ferner P_1, Q_1 auf AB und R_1, S_1 auf h, also ist (1) erfüllt. Weiterhin folgt $\overline{\sphericalangle MP_1S_1} = \overline{\sphericalangle MQ_1R_1} = 90^\circ$ und $\overline{MS_1} = \overline{MR_1}$ (Radien von h). Also gilt $\triangle MP_1S_1 \cong \triangle MQ_1R_1$ (Innenwinkelsatz und wsw). Damit folgt $\overline{P_1S_1} = \overline{Q_1R_1}$, und $P_1Q_1R_1S_1$ ist als Rechteck nachgewiesen, erfüllt also (2).
Schließlich folgt aus dem Strahlensatz (oder vermittels $\triangle MQ_1R_1 \sim \triangle MF_1G_1$)

$$\overline{Q_1R_1} : \overline{MQ_1} = \overline{F_1G_1} : \overline{MF_1};$$

hiernach und wegen (6) gilt

$$\overline{Q_1R_1} : \overline{P_1Q_1} = \overline{F_1G_1} : \overline{E_1F_1} = \overline{FG}:\overline{EF} = \sqrt{3}:2,$$

also (3).

Entsprechend beweist man aus (8), (9): $P_2Q_2R_2S_2$ erfüllt (1), (2) und mit $\overline{P_2Q_2} : \overline{Q_2R_2} = \overline{FG}:\overline{GH} = \sqrt{3}:2$ auch (3).

<u>Bemerkungen:</u> Die beiden Vierecke können zusammen oder in getrennten Zeichnungen konstruiert sein. Es gibt mehrere Lösungswege. Zwei Beispiele:

1. Man kann für $r := \overline{MA}$ (gegeben) und $x_i := \overline{MQ_i}$, $y_i := \overline{Q_iR_i}$ (gesucht) rechnerisch aus $x_i^2 + y_i^2 = r^2$ $(i = 1;2)$
   und $y_1 : 2x_1 = \sqrt{3}:2$ bzw. $2x_2 : y_2 = \sqrt{3}:2$ auf (beispielsweise) $x_1 = \frac{1}{2}r$ bzw. $y_2 = \frac{4}{\sqrt{19}}r$ schließen und diese Längen konstruieren (z. B. erst $a\sqrt{19} = \sqrt{(10a)^2-(9a)^2}$ (a beliebig) nach Pythagoras und daran $y_2 : r = 4a : a\sqrt{19}$ mit dem Strahlensatz).
2. Der obige Lösungsweg wird vereinfacht, wenn man $\overline{AS_1} = \overline{BR_1} = \overline{MA}$ zur Konstruktion von $Q_1R_1S_1P_1$ im Sinne des obigen FGHE zur Gewinnung von $P_2Q_2R_2S_2$ heranzieht (Abb. L 281024d).

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

281021

Angabe der gesuchten Zahl	2 Punkte
Nachweis der Teilbarkeit durch 450	2 Punkte
Nachweis der Minimalität	6 Punkte
	10 Punkte

281022

Herleitung der Funktion $f(x) = 3x^2-6x-9$	6 Punkte
Nachweis, daß f(x) die gegebene Funktionalgleichung erfüllt	2 Punkte
Berechnung der Nullstellen	2 Punkte
	10 Punkte

281023

Übertragung des Textes in eine Skizze	1 Punkt
Beweis (Für das ordentliche Benennen der verwendeten Sätze sind davon 2 Punkte zu reservieren.)	9 Punkte
	10 Punkte

281024

Teil a) pro Viereck	2 Punkte
Teil b) pro Viereck	1 Punkt
Teil c) pro Viereck	2 Punkte
	10 Punkte