XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

280931

Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.
Beweisen Sie, daß in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

280932

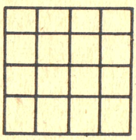

Abb. A 280932

In jedes der 16 Felder eines 4 × 4-Quadrates (Abb. A 280932) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.
Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in die andere überführt.

280933

Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide P = ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD eine Ebene e so gibt, daß die Schnittfigur von P mit e ein gleichseitiges Dreieck ist!

A 9;I

<u>Hinweis:</u> Gibt es nicht zu jeder Pyramide P eine solche Ebene e, so ist für eine Pyramide P diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene e, so ist anzugeben, wie eine Ebene e gefunden werden kann und daß jede so gefundene Ebene e die geforderte Bedingung erfüllt.

A 9;II

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

280934

Beweisen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen x und y stets die Ungleichung

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

gilt!

280935

Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck ABCD gibt, in dem die Winkelhalbierende von ∢ ACB durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht!

280936

Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Eckfelder (Abb. A 280936) vollständig so in Teile zu zerlegen, daß jedes Feld aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!

Hinweis: Es ist auch zugelassen, daß in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.

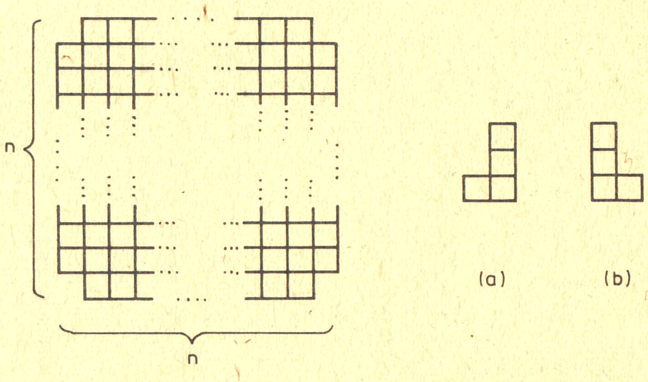

Abb. A 280936

30 10 63-1

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

280931) Lösung: **6 Punkte**

Für jede natürliche Zahl n, die nicht durch 5 teilbar, also mit einer natürlichen Zahl k von einer der Formen

$$5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$$

ist, ist n^2 von einer der Formen

$$(5k+1)^2 = 25k^2 + 10k + 1,$$
$$(5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4,$$
$$(5k+3)^2 = 25k^2 + 30k + 5 + 4,$$
$$(5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + 15 + 1,$$

also jeweils mit einer natürlichen Zahl m von einer der Formen $5m+1$, $5m+4$.

Nun muß für jedes pythagoreische Zahlentripel a, b, c einer der folgenden Fälle eintreten:

1. Eine der Zahlen a, b ist durch 5 teilbar.
2. Beide Zahlen a, b sind nicht durch 5 teilbar.
   In diesem Fall können nicht beide Zahlen a^2, b^2 von der Form

   $$a^2 = 5m_1+1, \quad b^2 = 5m_2+1$$

   mit je einer natürlichen Zahl m_1 bzw. m_2 sein; denn dann wäre

   $$a^2 + b^2 = 5m_1 + 5m_2 + 2$$

   von keiner der Formen $5m + 1$, $5m + 4$, könnte also nicht gleich dem Quadrat c^2 einer natürlichen Zahl c sein.
   Entsprechend widerlegt man das gleichzeitige Auftreten von

   $$a^2 = 5m_1 + 4, \quad b^2 = 5m_2 + 4,$$

   das auf $a^2 + b^2 = 5m_1 + 5m_2 + 5 + 3$ führen würde.
   Also muß im 2. Fall eine der Zahlen a^2, b^2 von der Form $5m_1 + 1$ und die andere von der Form $5m_2 + 4$ sein. Daraus folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5m_1 + 5m_2 + 5$$

ist durch 5 teilbar. Also ist, da 5 Primzahl ist[1], auch c durch 5 teilbar.

Damit ist in jedem möglichen Fall mindestens eine der Zahlen a, b, c als durch 5 teilbar nachgewiesen.

Bemerkung: Es gibt, z. B. durch Verwendung der Kongruenzschreibweise, kurze Lösungsdarstellungen, etwa:
Ist $n \not\equiv 0 \bmod 5$, so gilt eine der Kongruenzen $n \equiv \pm 1$, $n \equiv \pm 2$, also eine der Kongruenzen $n^2 \equiv 1$, $n^2 \equiv 4 \equiv -1$. Also ist der Fall $a \not\equiv 0$, $b \not\equiv 0$ nur mit $a^2 \equiv 1$, $b^2 \equiv -1$ oder $a^2 \equiv -1$, $b^2 \equiv 1$ möglich, so daß $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 0$ und daher $c \equiv 0 \bmod 5$ folgt.

280932) Lösung: 7 Punkte

Die Zahl in dem Feld, das in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte liegt, sei a_{ij} genannt (i, j = 1, 2, 3, 4).

I. Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgt, daß für sie oder für eine durch Drehung oder Spiegelung aus ihr zu erhaltende Eintragung einer der folgenden Fälle vorliegt:

Die Zahlen $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44})$ bilden eine der Anordnungen

$$(0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1).$$

Für die beiden i, j mit $a_{ii} = a_{jj} = 0$ gilt dabei $a_{ij} = 1$ und $a_{ji} = 1$.

Beweis: Außer $a_{ii} = 0$ kann nach Voraussetzung über die i-te Spalte nicht für beide von i und j verschiedenen k die Gleichung $a_{ki} = 0$ gelten, d. h., es gibt ein $k \neq i, j$ mit $a_{ki} = 1$. Aus $a_{ii} = a_{jj} = 0$ folgt ferner $a_{kk} = 1$;
aus $a_{ki} = a_{kk} = 1$ folgt $a_{kj} = 0$, aus $a_{jj} = a_{kj} = 0$ folgt $a_{ij} = 1$.
Entsprechend folgt $a_{ji} = 1$.
Ebenso beweist man: Für die beiden i, j mit $a_{ii} = a_{jj} = 1$ gilt

$$a_{ij} = 0 \text{ und } a_{ji} = 0.$$

Daher liegt für die Eintragung einer der Fälle A, B, C, D aus Abb. L 280932a vor.

---

1 oder: da c^2 keine der - oben für alle nicht durch 5 teilbaren c ermittelten - Formen 5m + 1, 5m + 4 hat

Von diesen braucht der Fall D nicht berücksichtigt zu werden, da er durch Drehung in C übergeht.

0	1		
1	0		
		1	0
		0	1

A

0		1	
	1		0
1		0	
	0		1

B

0			1
	1	0	
	0	1	
1			0

C

1			0
	0	1	
	1	0	
0			1

D

Abb. L 280932a

In den Fällen A, B erhält man durch wiederholte Anwendung der Voraussetzungen, daß je nach dem Wert von a_{13} bzw. von a_{12} einer der Unterfälle A0, A1 bzw. B0, B1 vorliegt, im Fall C je nach a_{12} und a_{21} einer der Unterfälle C00, C01, C10, C11 (Abb. L 280932b).

0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0
0	1	0	1

A0

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1

B0

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

C00

0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0

C10

0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

A1

0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1

B1

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

C01

0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0

C11

Abb. L 280932b

Von diesen Unterfällen brauchen A1 und B1 nicht berücksichtigt zu werden, da sie durch Drehung in A0 bzw. B0 übergehen, und C01 nicht, da er durch Spiegelung in C10 übergeht.

II. Jede der fünf Eintragungen A0, B0, C00, C10, C11 erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Ferner kann man zeigen, daß sie im Sinne der Aufgabenstellung paarweise verschieden sind:
Daß A0 und B0 von allen jeweils vier anderen verschieden sind, folgt bereits aus der paarweisen Verschiedenheit der Diagonal-

felder-Eintragungen in A, B, C. Daß C00, C10, C11 paarweise verschieden sind, folgt z. B. aus Eigenschaften ihrer vier Randzeilen und -spalten: C00 enthält in allen diesen vier Linien nur je einen Wechsel zwischen 0 und 1; C10 enthält in zwei dieser Linien nur je einen Wechsel, in den beiden anderen Linien je drei Wechsel; C11 enthält in allen diesen vier Linien je drei Wechsel.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß die Bedingungen der Aufgabe durch genau fünf verschiedene Eintragungen erfüllt werden, von denen jede zu genau einer der Eintragungen A0, B0, C00, C10, C11 im Sinne der Aufgabenstellung gleich ist.

Hinweise zur Korrektur und zu anderen Lösungsmöglichkeiten:
Statt einer überwiegend verbalen Ermittlung kann auch ein Vorgehen mit mehr "systematischem Probieren" akzeptiert werden. Dabei ist einzuschätzen, ob aus der Darstellung genügend hervorgeht, daß alle verschiedenen Eintragungen erfaßt und alle Möglichkeiten des Drehens und Spiegelns berücksichtigt sind.
Es gibt noch mehrere andere Wege zum Auffinden bzw. Reduzieren von Fällen. Beispielsweise kann man aus der 2. OJM-Stufe zitieren, daß die Summe $a_{11} + a_{14} + a_{41} + a_{44} = 2$ sein muß, also auch in den vier Eckfeldern zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommen muß. Dies folgt dann auch für die vier Mittelfelder, da sie in den Bedingungen der Aufgabe eine gleichartige Rolle wie die Eckfelder spielen.

280933) Lösung: **7 Punkte**

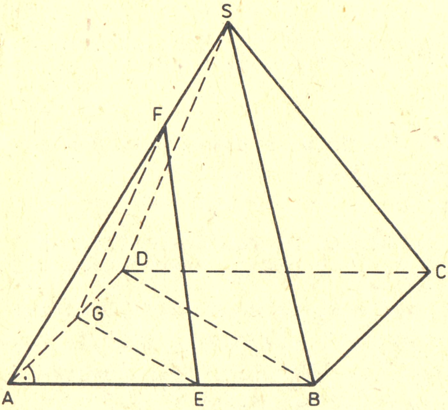

Abb. L 280933a

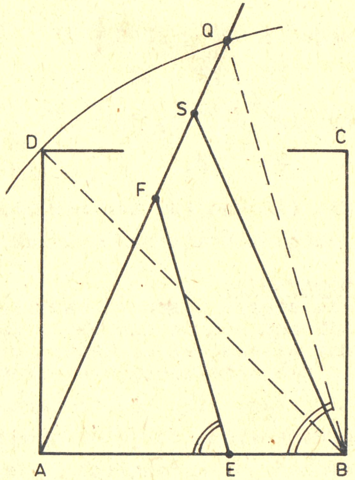

Abb. L 280933b

Zu jeder geraden Pyramide P = ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD (Abb. L 280933a) kann z. B. folgendermaßen eine Ebene e gefunden werden:

Da BD als Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ABD länger als AB ist, kann man (siehe Abb. L 280933b) ein Dreieck ABQ aus gegebenen $\overline{AB}$, $\overline{BQ} = \overline{BD}$ und $\overline{\sphericalangle BAQ} = \overline{\sphericalangle BAS}$ konstruieren. Zu diesem Dreieck kann man ein ähnliches Dreieck AEF so bilden, daß A, E, F in dieser Reihenfolge den Ecken A, B, Q entsprechen und daß sowohl $\overline{AE} \leqq \overline{AB}$ als auch $\overline{AF} \leqq \overline{AS}$ gilt. Wegen $\overline{\sphericalangle EAF} = \overline{\sphericalangle BAS}$ kann dies mit E auf AB und F auf AS erreicht werden. Wegen $\overline{AE} \leqq \overline{AD}$ gibt es auf AD einen Punkt G mit $\overline{AG} = \overline{AE}$. Als Ebene e werde die Ebene durch E, F, G gewählt.

Für jede so gebildete Ebene e gilt:

Da ADS und ABS als Seitenflächen von P zueinander kongruent sind, ist $\overline{\sphericalangle GAF} = \overline{\sphericalangle EAF}$.

Hieraus und aus $\overline{AG} = \overline{AE}$, $\overline{AF} = \overline{AF}$ folgt $\triangle AGF \cong \triangle AEF$ nach Kongruenzsatz sws und damit

$$\overline{GF} = \overline{EF}. \qquad (1)$$

Wegen $\overline{AG} : \overline{AE} = 1 : 1 = \overline{AD} : \overline{AB}$ und $\sphericalangle GAE = \sphericalangle DAB$ ist ferner $\triangle GAE \sim \triangle DAB$, also[1] gilt

$$\overline{EG} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{AB}; \qquad (2)$$

wegen $\triangle AEF \sim \triangle ABQ$ ist

$$\overline{AE} : \overline{EF} = \overline{AB} : \overline{BQ}. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt $\overline{EG} : \overline{EF} = \overline{BD} : \overline{BQ} = 1 : 1$, d. h.

$$\overline{EG} = \overline{EF}. \qquad (4)$$

Mit (1) und (4) ist bewiesen, daß die Ebene e die Pyramide P in dem gleichseitigen Dreieck EFG schneidet.

Bemerkung:
Als andere Lösungsdarstellung kann man z. B. die Seitenflächen ABS und ADS in die Ebene durch A, B, C, D hinein drehen (wie bei der Bildung eines Netzes der Pyramide).
In den erhaltenen Dreiecken ABS_1 und ADS_2 kann man zwei Dreiecke AEF_1 bzw. AGF_2 konstruieren, die zu $\triangle AEF$ aus Abb. L 280933b kongruent sind, für die insbesondere $\overline{AF_1} = \overline{AF_2}$ gilt. Beim Zurückdrehen gehen folglich F_1 und F_2 in denselben Punkt F über.
Dieser Figur kann man dann eine zu (1) bis (4) entsprechende Beweisführung entnehmen.

1 oder: Nach einer Strahlensatz-Umkehrung folgt aus $\overline{AG} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AB}$, daß GE ∥ DB ist. Hiernach folgt (2) aus dem Strahlensatz.

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

<u>280934) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Für beliebige positive reelle Zahlen x und y gilt stets

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \cdot (x^6 \cdot \sqrt{x} - y^6 \cdot \sqrt{y}) \geq 0; \qquad (1)$$

denn falls $x \geq y$ ist, sind beide Faktoren des Produktes auf der linken Seite größer oder gleich 0; falls aber $x < y$ ist, sind beide Faktoren negativ.
(Möglich ist auch die Variante, sich z. B. nur auf den Fall $x \geq y$ zu beschränken, da die zu beweisende Ungleichung bei Vertauschung von x und y unverändert bleibt.)
Aus (1) folgt

$$x^7 - x^6 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - y^6 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + y^7 \geq 0,$$

$$x^7 + y^7 \geq y^6 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + x^6 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}.$$

Dividiert man diese Ungleichung durch die positive Zahl $x^6 \cdot y^6 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$, so folgt die zu beweisende Ungleichung.

<u>Hinweise zur Korrektur:</u>
Bei vielen Lösungsvarianten ist (zur Bewertung) zu berücksichtigen, ob eine für den Beweis ausreichende logische Schlußrichtung ersichtlich ist: Es muß entweder von einer wahren Aussage (wie oben z. B. (1)) auf die zu beweisende Ungleichung geschlossen werden oder aber - bei indirekter Beweisführung - vom Gegenteil der zu beweisenden Ungleichung auf einen Widerspruch.
Ferner ist zu berücksichtigen, ob z. B. zum Dividieren oder Quadrieren ausreichende Voraussetzungen über das Vorliegen positiver bzw. nichtnegativer Zahlen gezeigt wurden.

<u>280935) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Für jedes Rechteck ABCD sei S der Scheitelpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$; ferner sei T der Fußpunkt des Lotes von S auf AC (siehe Abb. L 280935a). Wegen $\overline{\sphericalangle BCS} = \overline{\sphericalangle TCS}$, $\overline{\sphericalangle SBC} = \overline{\sphericalangle STC} = 90^\circ$ und $\overline{CS} = \overline{CS}$ folgt nach dem Kongruenzsatz wsw dann $\triangle BCS \cong \triangle TCS$, also

$$\overline{SB} = \overline{ST}. \qquad (1)$$

Ferner ist Dreieck ATS rechtwinklig mit der Hypotenuse AS, also gilt $\overline{ST} < \overline{AS}$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $\overline{SB} < \overline{AS}$, also ist S nicht der Mittelpunkt von AB. Damit ist bewiesen: Es gibt kein Rechteck ABCD, in dem die Winkelhalbierende von $\sphericalangle$ ACB durch den Mittelpunkt von AB geht.

Es gibt mehrere <u>andere Beweismöglichkeiten.</u>
Beispielsweise kann man als bekannten Sachverhalt den Satz zitieren (oder einen der üblichen Beweise hierzu ausführen), daß die Winkelhalbierende eines Winkels im Dreieck stets die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Damit folgt $\overline{SB} < \overline{AS}$ aus $\overline{BC} < \overline{AC}$. Man kann auch so vorgehen, daß man für den Mittelpunkt M von AB die Ungleichung $\overline{\sphericalangle ACM} < \overline{\sphericalangle MCB}$ nachweist (siehe Abb. L 280935b), z. B., indem man AC mit der Mittelsenkrechten von AB zum Schnitt P bringt, im Dreieck CPM aus $\overline{PM} < \overline{CP}$ (halbe Seitenlänge kleiner als halbe Diagonallänge von ABCD) auf $\overline{\sphericalangle PCM} < \overline{\sphericalangle CMP}$ schließt und $\overline{\sphericalangle CMP} = \overline{\sphericalangle MCB}$ (Wechselwinkelsatz) anwendet.

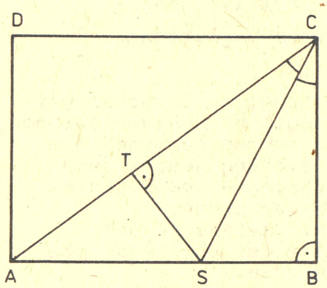

Abb. L 280935a

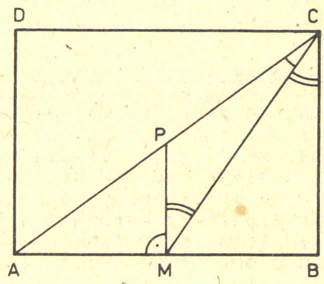

Abb. L 280935b

<u>280936) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Für jedes ungerade n ist eine solche Zerlegung unmöglich; denn das Brett besteht aus n^2-4 Feldern, also einer ungeraden Anzahl von Feldern; jede Fläche (a), (b) besteht aber aus vier Feldern, somit können mit solchen Teilen nur Gesamtflächen von gerader Felderzahl zusammengesetzt werden.

II. Für jedes $n = 4k+2$ mit einer natürlichen Zahl $k \geqq 1$ kann die Möglichkeit einer Zerlegung in Teile (a), (b) folgendermaßen bewiesen werden:

Für $n = 6$ gibt es z. B. die Zerlegung in Abb. L 280936a.

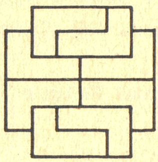

Abb. L 280936a

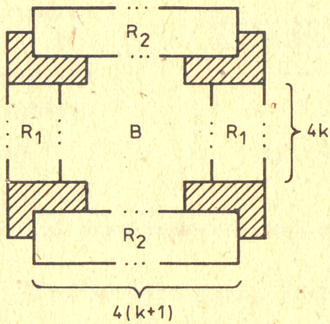

Abb. L 280936b

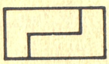

Abb. L 280936c

Ist bereits für ein $n = 4k+2$ mit $k \geqq 1$ zu dem $n \times n$-Brett B ohne die vier Eckfelder (Abb. L 280936b) eine Zerlegung nachgewiesen, so kann man aus ihr eine Zerlegung des Brettes mit $n = 4(k+1)+2$ statt n erhalten: Man fügt je zwei Teile (a), (b) (in Abb. L 280936b schraffiert) sowie je zwei Rechtecke R_1, R_2 der Formate $4k \times 2$ bzw. $4(k+1) \times 2$ hinzu. Diese sind dann in Rechtecke vom Format 4×2 und daher auch in Teile (a), (b) zerlegbar (siehe Abb. L 280936c).

III. Für jedes $n = 4k$ mit einer natürlichen Zahl $k \geqq 1$ ist eine Zerlegung in Teile (a), (b) unmöglich. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

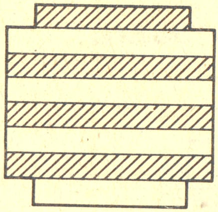

Abb. L 280936d

Man denke sich die Zeilen des Brettes abwechselnd schwarz und weiß gefärbt (Abb. L 280936d). Ist etwa die erste Zeile schwarz, so wird wegen der geraden Zeilenzahl 4k die letzte Zeile weiß; also hat das Brett ebenso viele schwarze wie weiße Felder. Folglich gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Die Anzahl aller schwarzen Felder}\\ \text{beträgt}\\ \qquad \frac{1}{2} \cdot (n^2-4) = 8k^2-2;\\ \text{Sie ist daher eine gerade Zahl.}\end{array}\right\} \quad (1)$$

Angenommen nun, es gäbe eine Zerlegung des Brettes in Teile (a), (b).

Da jedes Teil genau 4 der n^2-4 Felder erfaßte, wären dies genau $\frac{1}{4} \cdot (n^2-4) = 4k^2-1$ Teile, also eine ungerade Zahl von Teilen. Jedes dieser Teile würde aber bei jeder möglichen Lage in Abb. L 280936c entweder genau ein schwarzes Feld oder genau drei schwarze Felder aufweisen, also jedenfalls eine ungerade Anzahl schwarzer Felder. Damit müßten alle Teile insgesamt eine ungerade Anzahl schwarzer Felder enthalten. Wegen des so erhaltenen Widerspruchs zu (1) war die Annahme, es gäbe eine Zerlegung der genannten Art, falsch.

Mit I., II. und III. ist bewiesen: Eine Zerlegung der genannten Art ist genau für alle natürlichen Zahlen der Form $n = 4k+2$ $(k \geq 1)$ möglich.

Hinweise:
1. Zu II. kann auch eine Lösungsdarstellung gegeben werden, bei der statt einer schrittweisen Gewinnung das Aussehen einer Gesamtfigur, bestehend aus je zwei treppenförmigen Flächen T_1, T_2 und dazwischenliegenden Streifen, angegeben wird (siehe etwa Abb. L 280936e).
2. Man beachte zu III., daß ein Unmöglichkeitsbeweis nicht (jedenfalls nicht allein) auf der Grundlage des schrittweisen Vorgehens wie in Abb. L 280936b geführt werden kann.

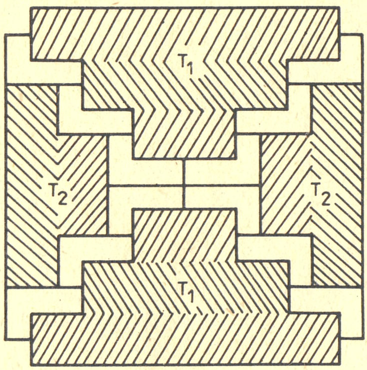

Abb. L 280936e

Klasse 9: Aufgaben 280931 bis 280936

1. Fallunterscheidung für die Quadratzahlen 3
   Diskussion der Summe zweier Quadratzahlen 3
   6

2. (Beschreibende bzw. systematisch aufzählende) Darstellung
   bis zur Aufstellung einer Reihe von Eintragungen 3
   Nachweis der Vollständigkeit der angegebenen Eintragungen.. 2
   Nachweis der Verschiedenartigkeit der angegebenen Eintragungen 2
   (die letzten beiden Nachweise u.U. in die Aufzählung eingearbeitet)
   7

3. Angaben zur Gewinnung zweier Punkte E auf AB, F auf AS
   mit $\overline{AE} : \overline{EF} = 1 : \sqrt{2}$ (oder ein anderer Teilschritt zur
   Ermittlung einer Ebene der gesuchten Art) 2
   Ausbau zur Beschreibung einer gesuchten Ebene 3
   Nachweis der geforderten Eigenschaft für die beschriebene
   Ebene... 2
   7

   (je nach Beweisanlage sind varrierte Punktverteilungen
   möglich)

4. Rechnerisch richtige Herleitungsschritte 4
   Angabe der erforderlichen Darstellungselemente (logische
   Schlußweise, Nachweis erforderlicher Voraussetzungen) 3
   7

5. Nachweis einer zum Beweis verwendbaren Eigenschaft
   (z.B. (1) für S oder $\overline{PM} < \overline{CP}$ für M, P) 3
   Ausbau zum Nachweis der geforderten Nichtexistenz 3
   6

6. I. Unmöglichkeit der Zerlegung für ungerades n 1
   II. Möglichkeit für n = 4k + 2:
   Beschreibung zum Aufbau einer Zerlegung (schrittweise oder
   wie in Hinweis 1.) 2
   Nachweis, daß die beschriebene Zerlegung zum Ziel führt ... 1
   III. Unmöglichkeit für n = 4k:
   Angabe eines zum Ziel führenden Motivs (wie im Lösungstext die Einführung der Schwarz-Weiß-Färbung) 1
   Ausführung des Beweises.................................... 2
   7

Hinweis zu 5.: Druckfehler im Löungstext, Z. 1:
Statt Scheitelpunkt setze Schnittpunkt