A 9

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

280921

Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

280922

In ein Quadrat mit 4x4 Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, daß jede der Zahlen genau einmal auftritt und daß sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe s ergibt ("Magisches Quadrat").

a) Beweisen Sie, daß in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in 4x4 Feldern) derselbe Wert für s auftreten muß!

b) Beweisen Sie, daß in jedem magischen Quadrat von 4x4 Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls s sein muß!

280923

In einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit a, b, c und α, β, γ bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$ schneide die Seite BC in einem Punkt D. Dabei sei $\overline{AD} = b$. Ferner sei vorausgesetzt, daß eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.

A 9
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen α, β, γ!

280924

a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!

b) Beweisen Sie, daß es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen läßt!

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

280921) Lösung: 10 Punkte

I. Wenn eine Zahl das Quadrat einer natürlichen Zahl n und zugleich auch die dritte Potenz einer natürlichen Zahl m ist, so ist sie eine natürliche Zahl, bei deren Primfaktorenzerlegung jeder Primfaktor in einer durch 2 und zugleich auch durch 3 teilbaren Anzahl vorkommt. Daher (und weil 2 und 3 zueinander teilerfremd sind) muß jeder Primfaktor in einer durch 6 teilbaren Anzahl vorkommen, die Zahl muß also die sechste Potenz einer natürlichen Zahl sein. Ist außerdem noch die Bedingung $n \neq m$ zu erfüllen, so scheiden 0 und 1 aus, da diese Zahlen Quadrat und dritte Potenz nur von jeweils derselben Zahl (von 0 bzw. von 1) sind.

II. Die Zahlen 2^6, 3^6, 4^6 und 5^6 erfüllen alle diese Bedingungen, wie aus $2^6 = 8^2 = 4^3$, $3^6 = 27^2 = 9^3$, $4^6 = 64^2 = 16^3$, $5^6 = 125^2 = 25^3$
(oder aus ihrer Darstellung $k^6 = (k^3)^2 = (k^2)^3$ mit $k > 1$, also $k^3 > k^2$) ersichtlich ist.

Mit I. und II. (und weil alle k^6 mit $k > 5$ größer als $2^6,\ldots,5^6$ sind) ist gezeigt: Die vier gesuchten Zahlen sind

$2^6 = 64$, $3^6 = 729$, $4^6 = 4096$, $5^6 = 15625$.

280922) Lösung: 10 Punkte

Für jedes magische Quadrat, dessen Zahlen mit

a1	a2	a3	a4
b1	b2	b3	b4
c1	c2	c3	c4
d1	d2	d3	d4

bezeichnet sind, gilt:

a) Da die Summe aller Zahlen von 1 bis 16 den Wert 136 hat, muß in jeder der vier Zeilen die Summe s = 136:4 = 34 auftreten.

b) Nach den Bedingungen für ein magisches Quadrat ist

$$\begin{aligned} a1+a2+a3+a4 &= s \text{ (1. Zeile)},\\ d1+d2+d3+d4 &= s \text{ (4. Zeile)},\\ -a2-b2-c2-d2 &= -s \text{ (2. Spalte)},\\ -a3-b3-c3-d3 &= -s \text{ (3. Spalte)},\\ a1+b2+c3+d4 &= s \text{ (Hauptdiagonale)},\\ d1+c2+b3+a4 &= s \text{ (Nebendiagonale)}. \end{aligned}$$

Die Addition dieser sechs Gleichungen ergibt

$2(a1 + a4 + d1 + d4) = 2s$ und damit die Behauptung.

Hinweis zur Korrektur: Die Untersuchung einiger Beispiele kann keine Wertungspunkte erbringen, da sie erst durch einen Vollständigkeitsnachweis (im Zusammenhang mit einer Angabe der 880 verschiedenen magischen Quadrate) als Teil eines zum Ziel führenden Lösungsweges aufgefaßt werden könnte.

280923) Lösung: 10 Punkte

I. Wenn die Winkelgrößen α, β, γ eines Dreiecks ABC die Voraussetzungen erfüllen, so folgt:

Wegen $\overline{AD} = b$ ergibt nach dem Basiswinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle ADC} = \overline{\sphericalangle ACD} = \gamma.$$

Da AD den Winkel $\sphericalangle BAC$ halbiert, folgt nach dem Innenwinkelsatz für ΔACD

$$\frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 2\gamma,$$
$$\alpha = 360^\circ - 4\gamma. \qquad (1)$$

Nach dem Innenwinkelsatz für ΔABC folgt damit

$$\beta = 180^\circ - (360^\circ - 4\gamma) - \gamma$$
$$= 3\gamma - 180^\circ. \qquad (2)$$

Für die Voraussetzung, daß eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist, gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

1. Fall: $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. Dies führt nach (1), (2) auf

$$360^\circ - 4\gamma = 2\gamma - 90^\circ,$$
$$\gamma = 75^\circ,$$
$$\alpha = 60^\circ,$$
$$\beta = 45^\circ.$$

2. Fall: $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$. Dies führt nach (1), (2) auf

$$3\gamma - 180^\circ = 180^\circ - \frac{3}{2}\gamma,$$
$$\gamma = 80^\circ,$$
$$\alpha = 40^\circ,$$
$$\beta = 60^\circ.$$

<u>3. Fall:</u> $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Dies führt nach (1), (2) auf

$\gamma = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$,

$\gamma = 60^\circ$,

$\beta = 0^\circ$.

Der 3. Fall scheidet also aus.

II. Die Winkelgrößen des 1. bzw. des 2. Falles, d. h.

$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 45^\circ,\ \gamma = 75^\circ \qquad (3)$$

bzw. $$\alpha = 40^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 80^\circ, \qquad (4)$$

sind Innenwinkelgrößen von Dreiecken ABC (denn sie sind positiv und erfüllen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$). Sie erfüllen auch die Bedingung, daß $\overline{AD} = b$ für die Winkelhalbierende AD gilt; denn sie erfüllen die Gleichung $\frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 2\gamma$, woraus nach dem Innenwinkelsatz $\overline{\measuredangle ADC} = \gamma$ und daher nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $\overline{AD} = \overline{AC}$ folgt.

Mit I., II. ist gezeigt, daß in (3), (4) alle gesuchten Möglichkeiten für α, β, γ angegeben sind.

<u>Hinweis:</u> Es gibt mehrere <u>Varianten des Lösungsansatzes</u>. Z. B. kann man aus $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ und der Voraussetzung des 1. Falles, d. h. $2\alpha = \beta + \gamma$, sofort auf $3\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ schließen bzw. im 2., 3. Fall ebenso auf $\beta = 60^\circ$ bzw. $\gamma = 60^\circ$. Dann kann jeweils die weitere Entwicklung mit (1) fortgesetzt werden.

<u>280924) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

a) Von je zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets eine gerade, die andere ungerade. Daher ist ihre Summe stets ungerade. Also können höchstens die ungeraden, d. h. die von 2 verschiedenen Primzahlen eine Darstellung der genannten Art besitzen. (Man kann auch so argumentieren: Die Primzahl 2 hat überhaupt nur die Darstellung 2 = 1+1 als Summe zweier von Null verschiedener natürlicher Zahlen, also keine Darstellung zweier aufeinanderfolgender solcher Zahlen.)

Für jede Primzahl $p \geqq 3$ gibt es die Darstellung

$$p = \frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2},$$

und darin gilt: Da p ungerade ist, sind p-1 und p+1 gerade, also $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{p+1}{2}$ ganze Zahlen. Wegen $p \geqq 3$ ist $p-1 \geqq 2$, also $\frac{p-1}{2} \geqq 1$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Wegen

$\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$ ist $\frac{p+1}{2}$ die darauffolgende (und damit ebenfalls von Null verschiedene) natürliche Zahl.

Die gesuchten Primzahlen sind also genau alle Primzahlen $p \geqq 3$.

b) Angenommen, es gäbe eine Primzahl p und für sie eine Darstellung $p = a_1 + \dots + a_n$ (1)

mit $n \geqq 3$ aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen $a_1, \dots, a_n$. Nach der bekannten Formel für die Summe aufeinanderfolgender Zahlen (oder allgemeiner: für arithmetische Summen) wäre dann

$$p = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n).$$

Daher müßte (mindestens) eine der Zahlen n, (a_1+a_n) gerade sein. Ferner wäre $a_1 \geqq 1$, $a_n \geqq n$, also $a_1+a_n \geqq 1+n$.

Wäre n gerade, so wäre wegen $n \geqq 3$ sogar $n \geqq 4$, also p in die ganzzahligen Faktoren $\frac{1}{2}n \geqq 2$ und $a_1+a_n > n \geqq 4$ zerlegt.

Wäre a_1+a_n gerade, so wäre p in die ganzzahligen Faktoren $n \geqq 3$ und $\frac{1}{2}(a_1+a_n) \geqq \frac{1}{2}(1+n) \geqq \frac{1}{2}(1+3) = 2$ zerlegt.

Damit ist die Annahme über (1) widerlegt, d. h. der verlangte Beweis geführt.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

280921

Ableitung notwendiger Bedingungen	4 Punkte
Angabe der vier Zahlen	4 Punkte
Nachweis, daß die angegebenen Zahlen die Bedingungen erfüllen	2 Punkte
	10 Punkte

280922

Teil a)	2 Punkte
Teil b)	
Umsetzung des Textes in ein geeignetes mathematisches Modell	2 Punkte
Beweis der Behauptung	6 Punkte
	10 Punkte

280923

Erkennen der Notwendigkeit von Fallunterscheidungen	1 Punkt
pro Fall	3 Punkte
	10 Punkte

280924

Teil a)	5 Punkte
Teil b)	5 Punkte
	10 Punkte