XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>280831</u>

Zwei wanderlustige Freunde A und B beschließen, auf einer Wanderstrecke von 30 km einander entgegenzugehen. Zu Beginn befindet sich A an einem Endpunkt, B an dem anderen Endpunkt dieser Strecke. Sie verständigen sich telefonisch über ihr Vorhaben und nehmen dabei an, daß jeder von ihnen seine persönliche Marschgeschwindigkeit während des ganzen Weges gleichbleibend beibehält. Damit erhalten sie die folgenden Aussagen:

(1) Wenn A 2 Stunden eher startet als B, so treffen sie sich $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Start von B.

(2) Wenn aber B 2 Stunden eher startet als A, so treffen sie sich 3 Stunden nach dem Start von A.

Zeige, daß unter diesen Voraussetzungen, wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, die Marschgeschwindigkeiten von A und B eindeutig bestimmt sind; ermittle diese Geschwindigkeiten! Überprüfe, daß auch umgekehrt gilt: Wenn A und B die ermittelten Geschwindigkeiten haben, dann treffen die Aussagen (1) und (2) zu.

<u>280832</u>

Beweise den folgenden Satz!

Wenn ABCD ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von AB, N der Mittelpunkt von BC und P der Schnittpunkt der Strecken CM und DN ist, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AP}$.

A 8;I

280833

Beweise die folgende Aussage!

Stets, wenn irgendwelche sechs unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen vorliegen, ist es unmöglich, diese sechs Zahlen so in zwei Gruppen einzuteilen, daß das Produkt der Zahlen einer Gruppe gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Gruppe ist.

Hinweis: Enthält bei einer Einteilung eine der zwei Gruppen nur eine Zahl, so gilt diese Zahl als das "Produkt" der Zahlen dieser Gruppe.

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

280834

Für ein Schulsportfest möchte die Klasse 8c aus den sieben im 100 m-Lauf besten Schülern eine aus vier Schülern bestehende Mannschaft zum 4 x 100 m-Staffellauf auswählen.

a) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den sieben Schülern ausgewählt werden?

b) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?

c) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?

d) In wieviel verschiedenen Reihenfolgen ihrer Starts lassen sich stets die vier Schüler einer Mannschaft zum Staffellauf aufstellen?

280835

Es sei ABC ein Dreieck, α sei die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die Größe des Winkels $\angle ABC$. Der Inkreis des Dreiecks berühre die Seite AB in D, die Seite BC in E und die Seite AC in F. Ermittle die Größe des Winkels $\angle FDE$ in Abhängigkeit von α und β !

Hinweis: Der Inkreis eines Dreiecks ist derjenige Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt.

280836

Gegeben seien zwei Strecken; für ihre Längen p und q gelte $p < q$. Gesucht ist ein Viereck ABCD, das die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt.

(1) Das Viereck ABCD ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

(2) Es gilt $\overline{AB} = p$ und $\overline{CD} = q$.

(3) Es gibt einen Kreis, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen und dessen Radius p beträgt.

A 8;II

I. Zeige, daß ein Viereck, wenn es die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus p und q konstruiert werden kann!

II. Beschreibe eine solche Konstruktion!

III. Zeige, daß ein Viereck, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

IV. Untersuche, unter welchen Bedingungen für die gegebenen Lösungen p und q ein solches Viereck

a) existiert,

b) bis auf Kongruenz eindeutig durch p und q bestimmt ist!

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

280831) Lösung: **6 Punkte**

I. Wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, so gilt für die Maßzahlen v_A, v_B der in $\frac{km}{h}$ gemessenen Geschwindigkeiten von A bzw. B:

Gehen A und B gemäß (1) jeweils von ihrem Start bis zum Treffen $4\frac{1}{2}$ Stunden bzw. $2\frac{1}{2}$ Stunden, so legen sie dabei Strecken zurück, deren in km gemessene Länge $4\frac{1}{2} \cdot v_A$ bzw. $2\frac{1}{2} \cdot v_B$ beträgt.

Daraus folgt $4\frac{1}{2} \cdot v_A + 2\frac{1}{2} \cdot v_B = 30.$ (3)

Gehen A und B aber gemäß (2) jeweils von ihrem Start bis zum Treffen 3 Stunden bzw. 5 Stunden, so folgt entsprechend

$$3 \cdot v_A + 5 \cdot v_B = 30. \qquad (4)$$

Aus (3) folgt $9 \cdot v_A + 5 \cdot v_B = 60;$

hieraus und aus (4) folgt

$$6 \cdot v_A = 30,$$
$$v_A = 5.$$

Damit ergibt sich aus (4)

$$5 \cdot v_B = 15$$
$$v_B = 3.$$

Also sind die Marschgeschwindigkeiten, wenn (1) und (2) zutreffen, eindeutig bestimmt; sie betragen $5\,\frac{km}{h}$ bzw. $3\,\frac{km}{h}$.

II. Wenn A und B diese Geschwindigkeiten haben, so folgt:

In $4\frac{1}{2}$ Stunden legt A die Teilstrecke $5 \cdot 4\frac{1}{2}$ km $= 22\frac{1}{2}$ km zurück und B in $2\frac{1}{2}$ Stunden die Teilstrecke $3 \cdot 2\frac{1}{2}$ km $= 7\frac{1}{2}$ km. Wegen $22\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 30$ treffen sie sich dann, also gilt (1).

In 3 Stunden legt A die Teilstrecke $5 \cdot 3$ km $= 15$ km zurück und B in 5 Stunden die Teilstrecke $3 \cdot 5$ km $= 15$ km.

Wegen $15 + 15 = 30$ treffen sie sich dann, also gilt auch (2).

280832) 7 Punkte

1. Lösungsweg:

Nach Voraussetzung gilt $\overline{BC} = \overline{CD}$ (Quadratseiten),

$\overline{BM} = \overline{CN}$ (halbe Quadratseiten),

$\overline{\sphericalangle CBM} = \overline{\sphericalangle DCN} = 90^\circ$.

Nach dem Kongruenzsatz sws ist folglich $\triangle BCM \cong \triangle CDN$ und somit

$$\overline{\sphericalangle BCM} = \overline{\sphericalangle CDN} = \overline{\sphericalangle CDP}. \qquad (1)$$

Wegen $\overline{\sphericalangle BCM} + \overline{\sphericalangle PCD} = 90^\circ$ gilt daher auch $\overline{\sphericalangle CDP} + \overline{\sphericalangle PCD} = 90^\circ$.

Daraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle CPD} = 90^\circ$, d. h.

$$CM \perp DN. \qquad (2)$$

Es sei Q der Mittelpunkt von CD und S der Schnittpunkt der Strecken AQ und DN. Dann gilt

$\overline{DA} = \overline{BC}$ (Quadratseiten),

$\overline{DQ} = \overline{BM}$ (halbe Quadratseiten),

$\overline{\sphericalangle ADQ} = \overline{\sphericalangle CBM} = 90^\circ$.

Nach dem Kongruenzsatz sws ist folglich $\triangle DAQ \cong \triangle BCM$ und somit $\overline{AQ} = \overline{CM}$.

Ferner ist $\overline{AM} = \overline{CQ}$ (halbe Quadratseiten); also ist AMCQ ein Parallelogramm. Somit gilt

$$AQ \parallel CM. \qquad (3)$$

Wegen (2) ergibt sich daher $AQ \perp DN$, d. h.

$$\overline{\sphericalangle ASD} = \overline{\sphericalangle ASP} = 90^\circ. \qquad (4)$$

Aus (3) folgt nach dem Strahlensatz

$$\overline{DS} : \overline{SP} = \overline{DQ} : \overline{QC} = 1 : 1,$$

also $\overline{DS} = \overline{PS}$. (5)

Aus (4), (5) und $\overline{AS} = \overline{AS}$ folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle ADS \cong \triangle APS$ und damit $\overline{AD} = \overline{AP}$,

w.z.b.w.

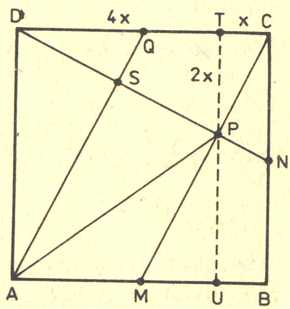

Abb. L 280831

2. Lösungsweg:

Wie im 1. Lösungsweg beweist man (1) und (2). Für die Lote PT und PU von P auf CD bzw. AB erhält man dann nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$$\triangle CBM \sim \triangle DPC \sim \triangle DTP \sim \triangle PTC.$$

Für $x = \overline{CT}$ folgt daher $\overline{TP} = 2x$, $\overline{TD} = 4x$ und somit

$$a = \overline{CD} = \overline{CT} + \overline{TD} = 5x,$$

$$\overline{PU} = a - 2x = 3x,$$

$$\overline{AU} = \overline{TD} = 4x.$$

Nach dem Satz des Pythagoras erhält man hieraus

$$\overline{AP} = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x = a.$$

280833) Lösung: 7 Punkte

Sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind stets mit einer geeigneten natürlichen Zahl n von der Form n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5. Für jede Einteilung in zwei Gruppen bezeichne P das Produkt der Zahlen einer Gruppe und Q das Produkt der Zahlen der anderen Gruppe.

Ist $n = 0$, so ist eines der Produkte P, Q gleich 0, das andere nicht, also gilt dann $P \neq Q$.

Ist $n > 0$, so muß eine der vier Zahlen n+1, n+2, n+3, n+4 durch eine Primzahl $p > 3$ teilbar sein.

Wären nämlich diese vier Zahlen durch keine anderen Primzahlen als 2 und 3 teilbar, so ergäbe sich folgendermaßen ein Widerspruch:

Im Fall eines geraden $n > 0$ müßten n+1 und n+3 ungerade, also Potenzen von 3, und außerdem größer als 1 sein; im Fall eines ungeraden n müßte dies für n+2 und n+4 gelten; es gibt aber keine zwei Potenzen von 3, die größer als 1 sind und sich nur um die Differenz 2 unterscheiden.

Wegen $p \geq 5$ folgt nun weiter, daß unter den sechs Zahlen n, n+1, ..., n+5 keine andere als die genannte (der vier Zahlen n+1, ..., n+4) durch p teilbar ist. Also ist eines der Produkte P, Q durch p teilbar, das andere nicht; somit ist ebenfalls $P \neq Q$ bewiesen.

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

280834) Lösung: 7 Punkte

a) Um zunächst einen der sieben Schüler auszuwählen, hat man genau 7 Möglichkeiten. Um dann einen zweiten Schüler auszuwählen, hat man zu jeder der 7 genannten Möglichkeiten genau 6 Fortsetzungsmöglichkeiten. Von den so gefundenen $7 \cdot 6$ Möglichkeiten führen aber je genau 2 zur gleichen Auswahl von zwei Schülern. Also gibt es genau $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ Möglichkeiten der Auswahl von zwei der sieben Schüler. So kann man fortfahren. Um einen dritten Schüler auszuwählen, hat man zu jeder der 21 Möglichkeiten genau 5 Fortsetzungsmöglichkeiten. Von den so gefundenen $21 \cdot 5$ Möglichkeiten führen aber je genau 3 zur gleichen Auswahl; also gibt es genau $\frac{21 \cdot 5}{3} = 35$ Möglichkeiten der Auswahl von drei der sieben Schüler. Entsprechend findet man: Es gibt genau $\frac{35 \cdot 4}{4} = 35$ Möglichkeiten der Auswahl von vier der sieben Schüler.

b) Sollen auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein, so hat man nur noch eine Auswahl von zwei der restlichen fünf Schüler zu treffen. Wie in a) gibt es hierfür genau $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Möglichkeiten der Auswahl.

c) Sollen auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein, so hat man nur noch einen der restlichen vier Schüler auszuwählen. Für diese Auswahl gibt es genau 4 Möglichkeiten.

d) Um zunächst den als Ersten startenden unter den vier Schülern auszuwählen, hat man genau 4 Möglichkeiten. In jeder dieser Möglichkeiten hat man für die Auswahl des als Zweiten startenden Schülers genau 3 Möglichkeiten. In jeder der entstandenen $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten hat man für den Dritten genau 2 Möglichkeiten; der Vierte steht dann jeweils fest. Also gibt es genau $12 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten der Startreihenfolge einer Mannschaft.

280835) Lösung: **6 Punkte**

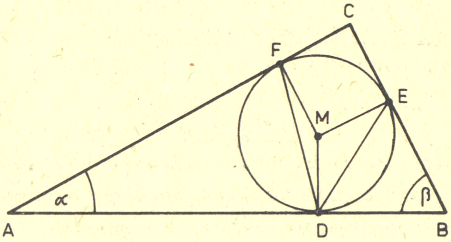

Abb. L 280835

Bezeichnet man den Mittelpunkt des Inkreises mit M, so sind DM und FM Radien. Die Geraden durch A und B bzw. durch A und C sind Tangenten an den Inkreis. Da Tangente und Berührungsradius aufeinander senkrecht stehen, gilt $\overline{\sphericalangle ADM} = \overline{\sphericalangle AFM} = 90^\circ$. (1)

Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkelgrößen im Viereck gilt für das Viereck ADMF: $\overline{\sphericalangle BAC} + \overline{\sphericalangle ADM} + \overline{\sphericalangle DMF} + \overline{\sphericalangle AFM} = 360^\circ$.

Unter Verwendung von (1) und nach Definition von α folgt daraus

$$\overline{\sphericalangle DMF} = 180^\circ - \alpha\,. \qquad (2)$$

Durch analoge Überlegungen im Viereck DBEM erhält man

$$\overline{\sphericalangle DME} = 180^\circ - \beta\,. \qquad (3)$$

Für die Größe des gesuchten Winkels $\sphericalangle$ FDE gilt

$$\overline{\sphericalangle FDE} = \overline{\sphericalangle MDF} + \overline{\sphericalangle MDE}. \qquad (4)$$

Der Winkel $\sphericalangle$ MDF ist Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks DMF; wegen (2) gilt somit

$$\overline{\sphericalangle MDF} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Analog folgt aus (3): $\overline{\sphericalangle MDE} = \frac{\beta}{2}$.

Somit erhält man aus (4): $\overline{\sphericalangle FDE} = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

<u>Bemerkung:</u> Man kann auch, analog zu (2), $\overline{\sphericalangle FME} = 180^\circ - \gamma$ (mit $\gamma := \overline{\sphericalangle ABC}$) und daraus nach dem Peripheriewinkel-Zentriwinkel-Satz $\overline{\sphericalangle FDE} = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ erhalten.

280836) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn ein Viereck ABCD die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so gilt:

Der Mittelpunkt des in (3) genannten Kreises sei M; dann ist ABM nach (2) und (3) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge p.

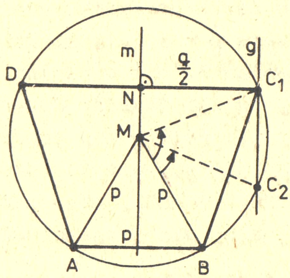

Abb. L 280836

Die Mittelsenkrechte m von AB geht folglich durch M. Wegen (1) steht sie auch auf CD senkrecht. Wegen (2), und da das Lot vom Kreismittelpunkt auf eine Sehne diese halbiert, gilt $\overline{CN} = \frac{q}{2}$ für den Schnittpunkt N von m und CD. Also hat C den Abstand $\frac{q}{2}$ von der Geraden m und liegt folglich auf einer Parallelen zu m im Abstand $\frac{q}{2}$. Außerdem liegt C auf derselben Seite der Geraden m wie B. Damit ist bewiesen, daß ein Viereck ABCD, wenn es (1), (2), (3) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann:

II.

1. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck ABM mit der Seitenlänge p.
2. Man konstruiert die Mittelsenkrechte m von AB.
3. Man konstruiert auf derselben Seite der Geraden m wie B die Parallele g zu m im Abstand $\frac{q}{2}$. Hat sie einen Punkt mit dem Kreis um M mit p gemeinsam, so sei C einer dieser Punkte.
4. Man fällt das Lot CN von C auf m und verlängert es über N hinaus um seine Länge $\frac{q}{2}$ bis D.

III. Wenn ein Viereck ABCD nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt:

Nach den Konstruktionsschritten 2. und 4. sind AB und CD senkrecht auf m, also zueinander parallel; damit ist (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 1. ist $\overline{AB} = p$, nach Konstruktionsschritt 4. ist $\overline{CD} = q$; damit ist (2) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 1. und 3. liegen A, B und C auf dem Kreis um M mit p. Bei der Spiegelung an m geht dieser Kreis in sich über, da m durch den Mittelpunkt M des Kreises geht. Bei dieser Spiegelung geht C nach Konstruktionsschritt 4. in D über; also liegt auch D auf dem Kreis; damit ist (3) erfüllt.

IV. Die Konstruktionsschritte 1. und 2. sowie die Konstruktion von g in 3. sind stets bis auf Kongruenz eindeutig durchführbar. Ein gemeinsamer Punkt C von g mit dem Kreis existiert genau dann, wenn der Abstand zwischen m und g nicht größer als der Radius des Kreises ist, d. h. genau dann, wenn $\frac{g}{2} \leqq p$ gilt. Ein solcher Punkt ist genau dann eindeutig bestimmt (nämlich Berührungspunkt von g mit dem Kreis), wenn $\frac{g}{2} = p$ gilt, wenn dagegen $\frac{g}{2} < p$ ist, so gibt es genau zwei Schnittpunkte C_1, C_2, die man in 3. als C wählen kann. Liegt ein so erhaltener Punkt C vor, so ist jeweils D durch Konstruktionsschritt 4. eindeutig bestimmt. Im Fall $\frac{g}{2} < p$ erhält man so zu C_1 bzw. C_2 jeweils D_1 bzw. D_2. Da hierzu verschieden große (nicht überstumpfe) Zentriwinkel $\sphericalangle BMC_1$, $\sphericalangle BMC_2$, also auch verschieden lange Sehnen BC_1, BC_2 gehören, sind die Trapeze ABC_1D_1 und ABC_2D_2 zueinander nicht kongruent.

Damit ist bewiesen:

a) Genau dann existiert ein gesuchtes Viereck, wenn $\frac{g}{2} \leqq p$ gilt,

b) genau dann ist es bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, wenn $\frac{g}{2} = p$ gilt.

Klasse 8: Aufgaben 280831 bis 280836

1. Herleitung einer aus (1) folgenden Beziehung, z.B. (3) 2
Herleitung einer aus (2) folgenden Beziehung, z.B. (4) 1
Ermittlung der Geschwindigkeiten aus den hergeleiteten Beziehungen und Bestätigung der Forderungen (1), (2) 3
6

(Bei anderem Lösungsweg, ausgehend von der Angabe der Geschwindigkeiten und Bestätigung von (1), (2), sind die obigen ersten 2 + 1 Punkte für den Nachweis vorbehalten, daß die angegebenen Geschwindigkeiten die einzigen sind, die (1) und (2) erfüllen).

2. Nachweis einer ersten Aussage über P, z.B. (2) 2
Nachweis einer weiteren Aussage, z.B. über AS, sowohl Höhe als auch Seitenhalbierende zu sein; oder z.B. Ermittlung der Längen von DT, TP................................. 3
Abschließende Herleitung der zu beweisenden Aussage 2
7

3. Ansatz: Betrachtung der Zahlen n,..., n+5 (oder gleichwertiges Vorgehen) 1
Diskussion der Primfaktoren 2,3 3
Diskussion eines Primfaktors größer als 3 3
7

Bei anderem Vorgehen, z.B. Fallunterscheidung bezüglich der Gruppeneinteilung:
Diskussion der einzelnen Fälle: Insgesamt 5
Vollständigkeit der Fallunterscheidung 2
7

4. Vollständige Lösung einer der Aufgaben a), b) 3
Analoge Lösung der anderen Aufgaben a), b) 1
Analoge Lösung der Aufgabe c) 1
Lösung der Aufgabe d) 2
7

5. Ermittlung eines ersten Winkels, z.B. (2) 2
Anwendung eines weiteren Satzes, z.B. des Basiswinkelsatzes oder des Peripherie-Zentriwinkelsatzes, zur weiteren Winkelermittlung 3
Abschließende Ermittlung des gesuchten Winkels 1
6

6. I. Nutzung der Aussage, daß ABM gleichseitig ist 1
Nutzung der Aussage, daß C den Abstand c/2 von m hat 1
(bzw. gleichwertige Beweisschritte)
II. Ausreichende (textliche) Konstruktionsbeschreibung 2
III. Nachweis, daß die geforderten Eigenschaften erfüllt werden 1
IV. Gewinnung und Vollständigkeit der Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit 2
7