XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 7

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

280721

Im Mathematikunterricht einer Klasse wurden über eine natürliche Zahl, die zwischen 100 und 200 liegt, durch Schüler folgende Aussagen getroffen:

(1) André: "Die Zahl ist durch 11 teilbar".
(2) Birgit: "Die Zahl ist eine Primzahl".
(3) Christian: "Die Zahl ist eine zusammengesetzte Zahl".
(4) Doris: "Die Zahl ist eine Quadratzahl".

Der Mathematiklehrer stellt fest, daß genau eine dieser vier Aussagen falsch ist.

Untersuche, ob die Zahl durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Zahl an!

280722

Es sei ABC ein Dreieck; darin sei CD die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. Die Parallele durch B zu CD schneide die Verlängerung von AC über C hinaus in einem Punkt E.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck BEC gleichschenklig ist!

280723

Es sei ABCD ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die Längen der Seiten AB und CD verhalten sich wie 5 : 4.
(2) Die Mittellinie des Trapezes hat eine Länge von 5,4 cm.

(3) Die Höhe des Trapezes ist halb so groß wie die Länge der Seite AB.

Untersuche, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt des Trapezes ABCD eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, dann gib den Flächeninhalt des Trapezes in Quadratzentimetern an!

280724

a) Ermittle die Summe der Quersummen aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen!

b) Ermittle die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1000!

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

280721) Lösung: **9 Punkte**

Da eine Primzahl weder zusammengesetzte Zahl noch Quadratzahl sein kann, muß die Aussage (2) falsch sein, denn sonst wären (3) und (4) falsch, was der Feststellung des Mathematiklehrers widersprechen würde. Nochmals wegen dieser Feststellung ist (2) die einzige falsche der Aussagen (1) bis (4), also sind (1) und (4) wahr. Die gesuchte Zahl ist somit eine durch 11 teilbare Quadratzahl. Da 11 eine Primzahl ist, muß diese durch 11 teilbare Quadratzahl sogar durch $11^2=121$ teilbar sein. Die einzige durch 121 teilbare Zahl zwischen 100 und 200 ist aber die Zahl 121 selbst.

Damit ist gezeigt, daß die gesuchte Zahl eindeutig bestimmt ist; sie lautet 121.

280722) Lösung: **9 Punkte**

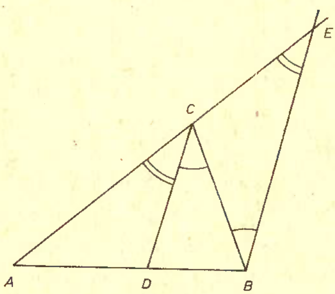

Abb. L 280722

Wegen $CD \parallel BE$ gilt

$\overline{\sphericalangle CBE} = \overline{\sphericalangle BCD}$ (Wechselwinkelsatz). (1)

Da CD den Winkel $\sphericalangle ACB$ halbiert, gilt

$\overline{\sphericalangle BCD} = \overline{\sphericalangle ACD}$. (2)

Nochmals wegen $CD \parallel BE$ gilt

$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle CEB}$ (Stufenwinkelsatz). (3)

Aus (1), (2) und (3) folgt

$\overline{\sphericalangle CBE} = \overline{\sphericalangle CEB}$.

Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist somit das Dreieck BEC (mit $\overline{BC} = \overline{EC}$) gleichseitig, w.z.b.w.

280723) Lösung: 10 Punkte

Wegen (1) gilt $\overline{AB}:\overline{CD} = 5:4$, also

$$\overline{CD} = \frac{4}{5}\overline{AB}. \qquad (4)$$

Da die Länge der Mittellinie im Trapez gleich der Hälfte der Summe der Längen der beiden parallelen Seiten ist, gilt wegen (2)

$$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD}) = 5{,}4 \text{ cm}.$$

Hieraus und aus (4) folgt

$$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\frac{4}{5}\overline{AB}) = 5{,}4 \text{ cm},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{5}\overline{AB} = 5{,}4 \text{ cm},$$

$$0{,}9\overline{AB} = 5{,}4 \text{ cm},$$

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}.$$

Nach (3) folgt hieraus: Die Höhenlänge des Trapezes beträgt 3 cm. Daraus und aus (2) ergibt sich nach der Formel für den Flächeninhalt des Trapezes, daß dieser (wegen $5{,}4\cdot 3 = 16{,}2$) durch die Angaben (1) bis (3) eindeutig bestimmt ist; er beträgt $16{,}2 \text{ cm}^2$.

280724) Lösung: 12 Punkte

a) Für jede mögliche Zehnerziffer gibt es genau zwei durch 5 teilbare Zahlen, nämlich eine, die auf 0, und eine, die auf 5 endet. Die Summe der Zehnerziffern aller zweistelligen durch 5 teilbaren Zahlen ist somit $2 \cdot (1+2+3+...+9) = 90$, und die Summe ihrer Einerziffern erhält man mit $9 \cdot 5 + 9 \cdot 0 = 45$. Also beträgt die gesuchte Summe der genannten Quersummen $90 + 45 = 135$.

b) Betrachtet man alle natürlichen Zahlen von 0 bis 999, so erkennt man, daß jede der Ziffern von 0 bis 9 in der Hunderterstelle genau 100mal auftritt.
Lassen wir die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Zehnerstelle jede der Ziffern genau zehnmal auf, beim Durchlaufen aller zehn Ziffern der Hunderterstelle insgesamt also $10 \cdot 10 = 100$ mal. Läßt man die Zehnerstelle und die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Einerstelle jede der Ziffern genau einmal auf, insgesamt $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$ mal.
Die Zahl 1000 hat die Quersumme 1.

Aus den vorgenannten Feststellungen folgt: Die gesuchte Summe der genannten Quersummen beträgt

L 7

$$300 \cdot 1 + 300 \cdot 2 + \ldots + 300 \cdot 9 + 1$$
$$= 300 \cdot 45 + 1$$
$$= 13\,501.$$

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Wird in der Lösung statt verbaler Begründungen mehr mit Aufzählungen (z. B. in a: aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen) gearbeitet, so ist zur Wertung zu berücksichtigen, ob aus der Darstellung (z. B. der Systematik) hervorgeht, daß die Vollständigkeit und kein mehrfaches Vorkommen in der Aufzählung erwiesen ist.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 7 Gesamtpunktzahl: 40

280721

Logischer Ermittlungsschritt (z. B.: (2) ist die einzige falsche Aussage)	4 Punkte
Schluß aus Teilbarkeitsaussagen (z. B.: Die Zahl ist durch 11^2 teilbar)	3 Punkte
Abschließender Ermittlungsschritt (Schluß auf 121)	2 Punkte
	9 Punkte

(Wird die richtige Zahl angegeben, ohne daß ein brauchbarer Lösungsweg erkennbar ist, können höchstens 2 Punkte vergeben werden)

280722

Nutzung der Voraussetzung, daß CD Winkelhalbierende ist	2 Punkte
Nutzung der Parallelität (Wechsel-, Stufenwinkelsatz)	4 Punkte
Abschließender Schritt zur Behauptung (Umkehrung Basiswinkelsatz)	3 Punkte
	9 Punkte

280723

Nutzung von (1) (z. B. um eine der Längen $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ durch die andere auszudrücken)	3 Punkte
Nutzung von (2) (z. B. um [etwa] die Länge $\overline{AB}$ zu ermitteln)	4 Punkte
Ermittlung der Höhenlänge und des Flächeninhalts	3 Punkte
	10 Punkte

280724

a) Berücksichtigung (vollständig, ohne mehrfaches Vorkommen) aller zweistelligen durch 5 teilbaren Zahlen		3 Punkte
Rechnerisch richtige Ermittlung der Summe ihrer Quersummen		2 Punkte
b) Berücksichtigung (vollständig, ohne mehrfaches Vorkommen) aller Ziffern in den Zahlen bis 1000 (z. B. bei Gliederung in die Sorten "Einer-, Zehner-, Hunderterziffer": für zwei dieser Sorten	je 2	5 Punkte
für die dritte Sorte)	1	
Rechnerisch richtige Ermittlung der gesuchten Summe		2 Punkte
		12 Punkte

(Werden richtige Ergebnisse angegeben, ohne daß ein brauchbarer Lösungsweg erkennbar ist, können höchstens jeweils 2 Punkte erteilt werden)