Neulandt

A 6

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 6

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>280621</u>

An der Bahnstrecke von Pfiffigstadt nach Knobelshausen liegen zwischen diesen beiden Orten noch drei Bahnstationen: Adorf, Bedorf, Cedorf.
In jedem dieser fünf Bahnhöfe kann man Fahrkarten nach jedem anderen dieser Bahnhöfe kaufen.
André besitzt zu jeder dieser möglichen Verbindungen genau eine Fahrkarte. Weitere Fahrkarten hat er noch nicht in seiner Sammlung.
Wieviel Fahrkarten hat André insgesamt? (Hinweis: Hin- und Rückfahrt gelten als verschiedene Verbindungen, kombinierte "Hin- und Rückfahrkarten" gibt es jedoch nicht.)

<u>280622</u>

Frau Müller und ihre Tochter Michaela, Frau Beyer und ihre Söhne Jan und Gerd sowie Frau Schulz mit ihren Kindern Steffi und Jens besuchen gemeinsam eine Veranstaltung. Frau Müller kauft die Eintrittskarten für alle und bezahlt 22 Mark. Wieviel Geld müssen Frau Beyer und Frau Schulz der Frau Müller geben, um die Eintrittskarten für sich und ihre Kinder zu bezahlen, wenn für Michaela, Jan, Gerd, Steffi und Jens jeweils nur der halbe Eintrittspreis wie für einen Erwachsenen entrichtet werden mußte?

Kurlauft

A 6

280623

Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest: Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um 8 cm^2 kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks. Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest: Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um 13 cm^2 größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.

Weise nach, daß sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen! Gib diese Seitenlängen an!

280624

Heidi, Manuela, Peggy und Simone starteten beim Schulsportfest, jedes dieser Mädchen in genau einer der Sportarten "Handball", "Mehrkampf", "Pop-Gymnastik", "Schwimmen". Ferner ist bekannt:

(1) Jedes der vier Mädchen errang genau eine Medaille: zwei Mädchen Gold, die beiden anderen Silber.

(2) Für Mädchen mit gleicher Medaille gilt stets: Bei jedem dieser Mädchen beginnt der Name mit demselben Buchstaben wie die Sportart des anderen Mädchens.

(3) Heidi erhielt eine Medaille geringeren Wertes als Manuela.

(4) Simone erkämpfte nicht die gleiche Medaille wie die Handballerin.

Zeige, daß aus diesen Angaben eindeutig gefunden werden kann,

a) in welcher Sportart jedes der Mädchen gestartet ist,

b) welche Medaille jedes der Mädchen errungen hat!

Überprüfe auch, ob mit den so gefundenen Sportarten und Medaillen alle Angaben (1) bis (4) erfüllt werden!

umlauft

L 6

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

280621) Lösung: 6 Punkte

Von jedem der fünf Orte gibt es genau vier Bahnverbindungen. Da alle diese Bahnverbindungen verschieden sind und André zu jeder von ihnen genau eine Fahrkarte besitzt, hat er wegen $5 \cdot 4 = 20$ insgesamt 20 Fahrkarten.

Hinweis zur Korrektur: Wird die Lösung als Aufzählung (von Verbindungen) formuliert, so ist zur Wertung zu berücksichtigen, ob aus der Darstellung (z. B. der Systematik) hervorgeht, daß die Vollständigkeit und kein mehrfaches Vorkommen der Verbindungen erwiesen ist.

280622) Lösung: 10 Punkte

Frau Müller kauft Eintrittskarten für 3 Erwachsene und 5 Kinder. Weil Kinder nur halbe Preise zahlen, zahlt Frau Müller (wegen $3 \cdot 2 = 6$ und $6 + 5 = 11$) soviel an Eintritt, wie für 11 Kinder zu zahlen wäre. Hieraus folgt wegen $22 : 11 = 2$, daß für jedes Kind 2 Mark zu entrichten sind.

Wegen $2 \cdot 2 = 4$ kostet der Eintritt für einen Erwachsenen 4 Mark. Frau Beyer hat somit (wegen $1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8$) an Frau Müller 8 Mark zu bezahlen, ebenso Frau Schulz.

Oder (anderer Lösungsweg):

Wenn die Eintrittskarte für ein Kind x Mark kostet, so kostet sie für einen Erwachsenen $2 \cdot x$ Mark. Für 3 Erwachsene und 5 Kinder sind damit $(3 \cdot 2 \cdot x + 5 \cdot x)$ Mark zu bezahlen. Da dies 22 Mark sind, folgt

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 \cdot x + 5 \cdot x &= 22, \\ 6 \cdot x + 5 \cdot x &= 22, \\ (6 + 5) \cdot x &= 22, \\ 11 \cdot x &= 22, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Also kostet die Karte für ein Kind 2 Mark.

Fortsetzung wie oben.

umlauft

280623) Lösung: 11 Punkte

Das Verkleinern der größeren Seitenlänge des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem ein Teilrechteck abgeschnitten wird, dessen eine Seitenlänge 2 cm und dessen Flächeninhalt 8 cm^2 beträgt. Wegen 8:2 = 4 beträgt seine andere Seitenlänge 4 cm. Sie ist zugleich die kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks; diese ist damit eindeutig ermittelt.

Das Vergrößern beider Seitenlängen des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem zwei Teilrechtecke hinzugefügt werden, eines mit der Seitenlänge 1 cm und (wegen 4+1 = 5) 5 cm, also einem Flächeninhalt von 5 cm^2, das andere mit einer Seitenlänge 1 cm und (wegen 13−5 = 8) dem Flächeninhalt 8 cm^2. Wegen 8:1 = 8 beträgt seine andere Seitenlänge 8 cm. Sie ist zugleich die größere Seitenlänge des ersten Rechtecks; auch diese ist damit eindeutig ermittelt.

Somit läßt sich eindeutig ermitteln: Die Seitenlängen des ersten Rechtecks betragen 4 cm und 8 cm.

Oder (anderer Lösungsweg):

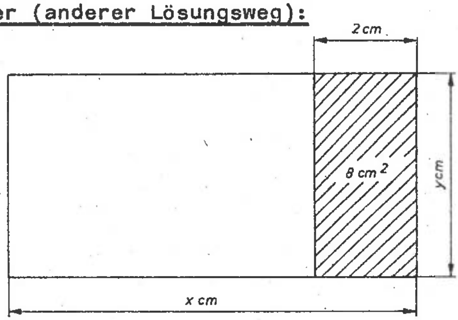

Abb. L 280623a

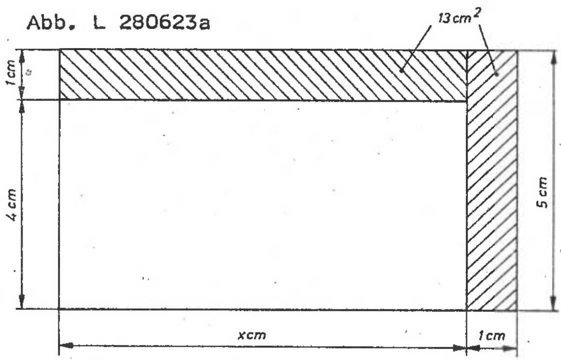

Abb. L 280623b

Wenn im ersten Rechteck die größere Seitenlänge x cm und die kleinere Seitenlänge y cm beträgt, so folgt aus Rolfs erster Feststellung (s. Abb. L 280623a):

$2 \text{ cm} \cdot y \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2.$

Aus der damit gewonnenen Gleichung $2 \cdot y = 8$ folgt

$y = 4;$

die kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks kann also eindeutig ermittelt werden, sie beträgt 4 cm. Aus Rolfs zweiter Feststellung (s. Abb. L 280623b) folgt daher, und weil (wegen 4+1=5) das dritte Rechteck die kleinere Seitenlänge

5 cm erhält,

$$x\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} + 1\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 13\text{ cm}^2.$$

Aus der damit gewonnenen Gleichung

$$x \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 13$$

folgt $x + 5 = 13,$

$$x = 8;$$

die größere Seitenlänge des ersten Rechtecks kann also ebenfalls eindeutig ermittelt werden, sie beträgt 8 cm.

Hinweise zur Korrektur: Statt verbaler Figurenbeschreibungen wie im ersten Lösungsweg kann auch ein stärkeres Heranziehen von Abbildungen erfolgen, aus deren Beschriftung (wie oben) Terme für die Rechnung abgelesen werden. Derartige Abbildungen können auch als Prinzipskizzen angelegt sein; sie brauchen also nicht maßgerecht zu sein (die richtigen Maße werden ja erst mit ihrer Hilfe ermittelt).

280624) Lösung: 13 Punkte

Aus (1) und (3) folgt:

Heidi erhielt Silber, (5)

Manuela erhielt Gold. (6)

Wegen (5) folgt aus (2):

Die Handballerin erhielt Silber. (7)

Aus (4) und (7) folgt:

Simone erhielt Gold. (8)

In (5), (6) und (8) sind bereits drei Medaillenträgerinnen ermittelt; damit folgt aus (1):

Peggy erhielt Silber. (9)

Nach (5), (9) ist (2) auf Heidi und Peggy anzuwenden und ergibt:

Heidi startete in Pop-Gymnastik, (10)

Peggy ist die Handballerin. (11)

Nach (6), (8) ist (2) auf Manuela und Simone anzuwenden und ergibt:

Manuela ist die Schwimmerin, (12)

Simone startete im Mehrkampf. (13)

In (10), (11), (12), (13) ist damit für jedes der Mädchen die Sportart und in (5), (6), (8), (9) auch die Medaillenart eindeutig gefunden.

Die Überprüfung ergibt:

(1) ist wegen (5), (6), (8), (9) erfüllt;

(2) ist hiernach und wegen (10), (11) für die Mädchen mit Silbermedaillen sowie wegen (12), (13) für die Mädchen mit Goldmedaillen erfüllt;

Umlauft

L 6

(3) ist wegen (5), (6) erfüllt;

(4) ist wegen (8), (11) und (9) erfüllt.

Hinweis zur Korrektur: Sowohl zur Herleitung der Sportarten und Medaillen als auch zur Überprüfung von (1) bis (4) soll die durchgeführte Überlegung aus der Darstellung (z. B. einer logisch möglichen und ausreichenden Reihenfolge der Teilangaben im Lösungstext) des Schülers ersichtlich sein. Eine (wie oben ausgeführte) weitergehende Angabe von Detailbegründungen kann damit entbehrlich werden.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 6 Gesamtpunktzahl: 40

280621

(Angaben zur) Aufzählung von Verbindungen (z. B. "4 von jedem Bahnhof")		3
Durchführung der damit möglichen (Auszählung oder rechnerischen) Ermittlung der Gesamtzahl		3
		6

280622

Erste Zurückführung auf vereinfachte Aussage (z. B. Gesamtpreis = Preis für 11 Kinder oder 3·2·x+5·x (nach Einführung von x = Preis für 1 Kind) o. ä.		4
Ermittlung eines Teilergebnisses (z. B. Preis für 1 Kind)		3
Ermittlung der Preise für die Familien Beyer und Schulz.		3
		10

280623

Kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks		3
Größere Seitenlänge des ersten Rechtecks (z. B. aufgeteilt in: Erfassung des dritten Rechtecks (z. B. Zerlegung der Zusatzfläche in 2 Rechtecke)	3	
Begründung zur Ermittlung der gesuchten Seitenlänge	2	8
Rechnerisch richtige Ausführung dieser Ermittlung).	3	
		11

280624

Ermittlung der 4 Medaillen- und 4 Sportartenaussagen (z. B. aufgeteilt in:		
zwei aufwendigste Ermittlungen	je 3	
eine weitere Ermittlung	2	13
fünf restliche Ermittlungen).	je 1	
		13