Umlauft

A 11/12;I

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

271241

In einer Ebene sei G die Menge aller derjenigen Punkte, deren rechtwinklige kartesische Koordinaten ganze Zahlen sind. Ferner sei F eine Menge von 1988 verschiedenen Farben.
Man beweise: Für jede Verteilung von Farben, bei der jeder Punkt aus G genau eine der Farben aus F erhält, gibt es in G vier gleichfarbige Punkte, die die Ecken eines Rechtecks mit achsenparallelen Seiten sind.

271242

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$1 \cdot x^3 + 9 \cdot y^2 + 8 \cdot y + 8 = 1988, \qquad (1)$$
$$1 \cdot y^3 + 9 \cdot z^2 + 8 \cdot z + 8 = 1988, \qquad (2)$$
$$1 \cdot z^3 + 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 8 = 1988. \qquad (3)$$

271243

Wieviel verschiedene Wörter $(a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n)$ kann man insgesamt aus den Buchstaben $a_i \in \{1,2,3,4,5\}$, $i = 1,\ldots,n$, derart bilden, daß

$$|a_j - a_{j+1}| = 1$$

für $j = 1,\ldots,n-1$ gilt?

A 11/12;II

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

271244

Durch ein konvexes n-Eck $P_1P_2 \dots P_n$, das einen Inkreis c besitzt, sei eine Gerade g gelegt, die die Seite P_nP_1 in einem Punkt M und eine Seite P_kP_{k+1} $(1 \leq k < n)$ in einem Punkt N schneidet.

Die Gerade g sei so gelegt, daß sie sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des n-Ecks halbiert, d. h., daß die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:

(1) Die Längen der Streckenzüge $MP_1P_2 \dots P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2} \dots \dots P_nM$ sind einander gleich.

(2) Die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2 \dots P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2} \dots \dots P_nM$ sind einander gleich.

Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt des Kreises c.

271245

Es sei (x_n) die durch

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 1,$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4} \quad (n = 2,3,4,\dots)$$

definierte Zahlenfolge. Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

Von den nachstehenden Aufgaben 271246A und 271246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

271246A

Alfred und Bernd teilen sich n Äpfel, indem der Reihe nach für jeden einzelnen Apfel durch eine Zufallsentscheidung (z. B. Werfen einer Münze) festgelegt wird, wer diesen Apfel erhält. Ein solcher Verteilungsvorgang heiße für Alfred "günstig" genau dann, wenn Alfred nicht nur am Ende, sondern während des gesamten Vorgangs niemals weniger Äpfel in seinem Besitz hat als Bernd.

A 11/12;II

Als Wahrscheinlichkeit w(n) dafür, daß ein Verteilungsvorgang für Alfred günstig ist, bezeichnet man den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Anzahl aller für Alfred günstigen Verteilungsvorgänge durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Verteilungsvorgänge dividiert wird.

a) Man ermittle w(4).

b) Man ermittle w(n) für beliebiges natürliches $n \geqq 2$.

271246B

Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ und für je n im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ gibt es reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit $0 \leqq a_i \leqq 1$ $(i = 1, \dots, n)$, für die

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gilt.

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

271241) Lösung: 7 Punkte

Es sei $n = 1988$. Für jede natürliche Zahl a gilt: Da F nur n Farben enthält, gibt es unter den $n+1$ Punkten

$$(a;0),\ a;1),\ \ldots,\ (a;n)$$

zwei von gleicher Farbe; es seien etwa

$$(a;s_a),\ (a;t_a) \text{ von der Farbe } f_a \ (0 \leqq s_a < t_a \leqq n).$$

Da F nur endlich viele Farben enthält, muß eine von ihnen unter den so definierten Farben f_a ($a = 0,1,2,\ldots$) unendlich oft vorkommen; dies sei etwa die Farbe φ.
Da es ferner nur endlich viele Möglichkeiten für ganze Zahlen s, t mit $0 \leqq s < t \leqq n$ gibt, muß in den soeben nachgewiesenen unendlich vielen Punktepaaren $(a;s_a)$, $(a;t_a)$ der Farbe φ mindestens eine dieser Möglichkeiten für s_a, t_a, etwa die Möglichkeit $s_a = \sigma$, $t_a = \tau$, zweimal (sogar unendlich oft) vorkommen, etwa in den Punktepaaren mit $a = \alpha$ und mit $a = \beta$ ($\alpha \neq \beta$).
Das besagt: Es gibt vier Punkte

$$(\alpha;\sigma),\ (\alpha;\tau),\ (\beta;\sigma),\ (\beta;\tau) \text{ der Farbe } \varphi\ ;$$

die Existenz solcher Punkte war zu beweisen.

<u>Bemerkung:</u> Anstelle der Folgerung, daß eine Farbe φ unendlich oft unter den f_a vorkommen muß, kann man auch (mit einer Variante des Dirichletschen Schubfachschlusses) erhalten, daß unter $n \cdot \binom{n+1}{2} + 1$ der Farben f_a, etwa unter denen mit $a = 0,1,\ldots, n \cdot \binom{n+1}{2}$, eine sein muß, die $\left(\binom{n+1}{2} + 1\right)$mal vorkommt. Dann sind unter den $\binom{n+1}{2} + 1$ Punktepaaren $(a;s_a)$, $(a;t_a)$ dieser Farbe φ zwei mit den gleichen s_a-, t_a-Werten σ, τ.
Derartige Beweisführungen vermeiden den Rückgriff auf unendliche Mengen, benötigen aber mehr Beweismittel, im Beispiel die Anzahlformel $\binom{n+1}{2}$ für Paare $(s;t)$ mit $0 \leqq s < t \leqq n$ sowie Varianten (in anderen Beweiswegen auch: mehrfaches Anwenden) des Schubfachschlusses.

271242)Lösung: **7 Punkte**

I. Wenn ein Tripel (x,y,z) reeller Zahlen die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:

(a) Jede der Zahlen x,y,z ist kleiner als 13.

Beweis: Aus (1) folgt

$$x^3 = 1980 - 9y^2 - 8y = 1980 - (3y + \frac{4}{3})^2 + \frac{16}{9} \leqq 1980 + \frac{16}{9} < 13^3,$$

$$x < 13.$$

Entsprechend erhält man $y < 13$ und $z < 13$.

(b) Keine der Zahlen x,y,z ist größer als 10.

Beweis: Wäre $x > 10$, so könnte man aus (a) auf $x^2 < 13^2$ schließen und damit aus (3)

$$z^3 = 1980 - 9x^2 - 8x > 1980 - 9 \cdot 13^2 - 8 \cdot 13 = 1980 - 13 \cdot 125 > 0,$$

$$z > 0$$

erhalten; andererseits folgte

$$z^3 = 1980 - 9x^2 - 8x < 1980 - 9 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10 = 1000,$$

$$z < 10.$$

Daraus könnte man wegen $z > 0$ auf $z^2 < 10^2$ schließen und aus (2)

$$y^3 = 1980 - 9z^2 - 8z > 1980 - 9 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10 = 1000,$$

$$y > 10$$

erhalten. Mit $x > 10$, $y > 10$ ergäbe sich aber

$$x^3 + 9y^2 + 8y + 8 > 1988$$ im Widerspruch zu (1).

Entsprechend beweist man $y \leqq 10$ und $z \leqq 10$.

(c) Eine der Zahlen x,y,z ist gleich 10.

Beweis: Andernfalls wären nach (b) alle drei Zahlen x,y,z kleiner als 10. Dann aber folgte aus (3)

$$x^3 - z^3 = x^3 + 9x^2 + 8x - 1980$$
$$= (x - 10)(x^2 + 19x + 198).$$

Wegen $x < 10$ und $x^2 + 19x + 198 = (x + \frac{19}{2})^2 - \frac{361}{4} + 198$
$\geqq - \frac{361}{4} + 198 > 0$ folgte

$$x^3 - z^3 < 0,$$

$$x < z.$$

Entsprechend ergäbe sich $y < x$ und $z < y$, also der Widerspruch $z < y < x < z$.

(d) Es gilt $(x,y,z) = (10,10,10)$.

Beweis: Ist die in (c) genannte Zahl $x = 10$, so folgt aus (3)

$z^3 = 1980 - 9x^2 - 8x = 1980 - 9 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10 = 1000,$

$z = 10$

und damit aus (2) ebenso $y = 10$.

Entsprechend schließt man, wenn die in (c) genannte Zahl $y = 10$ oder $z = 10$ ist.

II. Die Probe zeigt, daß das Tripel (10,10,10) die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt.

t I. und II. ist gezeigt, daß genau dieses Tripel die genannten Gleichungen erfüllt.

Hinweis zur Korrektur: Bei verschiedenen Lösungsansätzen sind "versteckte" Fehlerquellen zu beachten, z. B. daß ein Schluß von $x < a$ auf $x^2 < a^2$ falsch sein kann, wenn nämlich (noch) keine ausreichende untere Schranke für x nachgewiesen wurde.

271243)Lösung: 7 Punkte

Bezeichnet man

die Anzahl der aus n Buchstaben bestehenden zulässigen Wörter mit x_n,

die Anzahl der von diesen mit 1 beginnenden zulässigen Wörter mit y_n,

die Anzahl der von diesen mit 2 beginnenden zulässigen Wörter mit z_n,

die Anzahl der von diesen mit 3 beginnenden zulässigen Wörter mit u_n,

die Anzahl der von diesen mit 4 beginnenden zulässigen Wörter mit v_n,

e Anzahl der von diesen mit 5 beginnenden zulässigen Wörter mit w_n,

dann gilt offenbar (wegen der Symmetrie) $v_n = z_n$ und $w_n = y_n$ und weiter

$$x_n = 2y_n + 2z_n + u_n, \qquad (1)$$

$$y_n = z_{n-1}, \qquad (2)$$

$$z_n = y_{n-1} + u_{n-1}, \qquad (3)$$

$$u_n = 2z_{n-1}.$$

Aus (2), (3) und (4) ergibt sich

$$z_n = z_{n-2} + 2z_{n-2} = 3z_{n-2} \quad \text{mit } z_1 = 1, \quad z_2 = 2,$$

also
$$\begin{cases} z_{2n} = 2\cdot 3^{n-1}, & n \geqq 1 \\ z_{2n+1} = 3^n, & n \geqq 0. \end{cases}$$

Aus (2) erhält man somit

$$y_{2n} = z_{2n-1} = 3^{n-1}, \quad y_{2n+1} = z_{2n} = 2\cdot 3^{n-1},$$

$$u_{2n} = 2z_{2n-1} = 2\cdot 3^{n-1}, \quad u_{2n+1} = 2z_{2n} = 4\cdot 3^{n-1}$$

und somit

$$x_{2n} = 2y_{2n} + u_{2n} = 2\cdot 3^{n-1} + 4\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-1} = 8\cdot 3^{n-1}, \ n\geqq 1,$$

$$x_{2n+1} = 2y_{2n+1} + 2z_{2n+1} + u_{2n+1} = 4\cdot 3^{n-1}+2\cdot 3^n+4\cdot 3^{n-1} = 14\cdot 3^{n-1}, \ n\geqq 1.$$

Für x_n mit $n = 1$ erhält man schließlich

$$x_1 = 5.$$

Umlauft

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

271244) Lösung: 6 Punkte

Mit O sei der Mittelpunkt und mit r der Radius des Inkreises bezeichnet. Da alle Seiten des n-Ecks Tangenten an den Inkreis sind und folglich in jedem Dreieck $P_iP_{i+1}O$ $(1 \leqq i < n)$ der Berührungsradius Höhe auf P_iP_{i+1} ist, ergibt sich der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit $\frac{r}{2} \cdot \overline{P_iP_{i+1}}$.

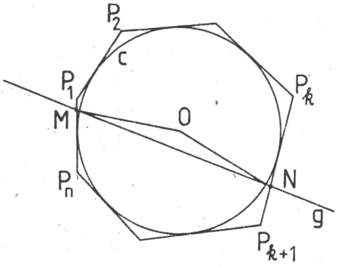

Abb. L 271244

Ebenso ergibt sich der Flächeninhalt der Dreiecke MP_1O, P_kNO, $NP_{k+1}O$ bzw. P_nMO mit $\frac{r}{2}\overline{MP_1}$, $\frac{r}{2}\overline{P_kN}$, $\frac{r}{2}\overline{NP_{k+1}}$ bzw. $\frac{r}{2}\overline{P_nM}$.

Aus Voraussetzung (1) der Aufgabe folgt

$$\frac{r}{2}(\overline{MP_1} + \overline{P_1P_2} + \ldots + \overline{P_kN}) = \frac{r}{2}(\overline{NP_{k+1}} + \overline{P_{k+1}P_{k+2}} + \ldots + \overline{P_nM}),$$

also

$$\frac{r}{2}\overline{MP_1} + \frac{r}{2}\overline{P_1P_2} + \ldots + \frac{r}{2}\overline{P_kN} = \frac{r}{2}\overline{NP_{k+1}} + \frac{r}{2}\overline{P_{k+1}P_{k+2}} + \ldots + \frac{r}{2}\overline{P_nM},$$

d. h., die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2 \ldots P_kNO$ und $NP_{k+1}P_{k+2} \ldots P_nMO$ sind einander gleich.

Ginge nun die Gerade g nicht durch O, so läge O im Innern von einem der beiden in (2) genannten Vielecke, o.B.d.A. etwa von $MP_1P_2 \ldots P_kN$ (s. Abb. L 271244). Dessen Flächeninhalt wäre somit die Summe der Flächeninhalte des Vielecks $MP_1P_2 \ldots P_kNO$ und des Dreiecks MNO, das nicht zur Strecke MN entartet wäre. Zugleich wäre der Flächeninhalt von $NP_{k+1}P_{k+2} \ldots P_nM$ die Differenz der Flächeninhalte des Vielecks $NP_{k+1}P_{k+2} \ldots P_nMO$ und des Dreiecks MNO. Damit ergäbe sich zwischen den in (2) genannten Flächeninhalten eine Differenz, die gleich dem doppelten Flächeninhalt von MNO, also nicht Null wäre. Wegen dieses Widerspruchs ist die Annahme, g ginge nicht durch O, widerlegt, d. h. der verlangte Beweis geführt.

271245)Lösung: 6 Punkte

Es sei a die positive Lösung der Gleichung

$$a = \frac{a+1}{a+4}, \tag{1}$$

nämlich der Gleichung $a^2 + 3a - 1 = 0$, d. h. die Zahl

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{13} - 3). \tag{2}$$

Wegen $3 < \sqrt{13} < 4$ gelten für diese Zahl die Ungleichungen

$$0 < a < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Nach Definition der x_n gilt (wie man durch vollständige Induktion erhält)

$$x_n > 0 \tag{4}$$

für alle n = 1,2,3,... . Nun wird bewiesen:

Behauptung: Für alle n = 0,1,2,... gilt

$$\left|x_{n+1} - a\right| < \frac{3}{2^n}.$$

Beweis:

I. Wegen (3) gilt $\frac{1}{2} < 1 - a < 1$, also $|x_1 - a| = |x_2 - a| < 1$ und damit erst recht $|x_1 - a| < 3$, $|x_2 - a| < \frac{3}{2}$, d. h. die Behauptung für n = 0 und für n = 1.

II. Für jede natürliche Zahl $k \geqq 1$ gilt der Schluß: Wenn die Behauptung für n = k und für n = k - 1 gilt, d. h., wenn die Ungleichungen

$$\left|x_{k+1} - a\right| < \frac{3}{2^k} \quad \text{und} \quad \left|x_k - a\right| < \frac{3}{2^{k-1}} \tag{5}$$

gelten, so folgt nach Definition der Folge (x_n) und nach (1)

$$\left|x_{k+2} - a\right| = \left|\frac{x_{k+1} + 1}{x_k + 4} - \frac{a+1}{a+4}\right| = \left|\frac{x_{k+1} - a}{x_k + 4} + \frac{a+1}{x_k + 4} - \frac{a+1}{a+4}\right|$$

$$= \left|\frac{x_{k+1} - a}{x_k + 4} - \frac{(a+1)(x_k - a)}{(x_k + 4)(a+4)}\right|.$$

Wegen (4) und (3), also $x_k + 4 > 4$, $a + 4 > 4$ und $a + 1 < 2$, ergibt sich daraus

$$|x_{k+2} - a| \leqq \frac{|x_{k+1} - a|}{x_k + 4} + \frac{(a + 1)|x_k - a|}{(x_k + 4)(a + 4)} \leqq \frac{|x_{k+1} - a|}{4} + \frac{2|x_k - a|}{4 \cdot 4}$$

und somit wegen (5)

$$|x_{k+2} - a| < \frac{3}{4 \cdot 2^k} + \frac{3}{8 \cdot 2^{k-1}} = \frac{3}{2^{k+1}},$$

d. h. die Behauptung für $n = k+1$.
Mit I., II. ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Damit ist gezeigt: Die Folge (x_n) ist konvergent, ihr Grenzwert ist die in (2) angegebene Zahl a.

<u>271246A)Lösung:</u> 7 Punkte

Jeder Verteilungsvorgang ist durch eine n-gliedrige Folge darstellbar, in der jedes Glied A oder B lautet. Eine solche Folge sei "j-Folge" genannt, wenn sie genau j Glieder A enthält. Eine Folge heiße genau dann "günstig", wenn sie einen für Alfred günstigen Verteilungsvorgang darstellt. Für

die größte ganze Zahl $m \leqq \frac{n}{2}$ (*)

gelten nun folgende Aussagen:

(1) Jede j-Folge mit $j < m$ ist ungünstig.

(2) Die (einzige) n-Folge (AA•••A) ist günstig.

(3) Für jedes j mit $m \leqq j < n$ ist die Anzahl aller ungünstigen j-Folgen gleich der Anzahl aller (j+1)-Folgen.
Dies kann wie folgt bewiesen werden:
Zu jeder ungünstigen j-Folge F gibt es eine kleinste Zahl $k \geqq 1$ derart, daß das k-te Glied B lautet, während sich unter den vorangehenden k-1 Gliedern ebenso viele Glieder A wie B befinden. Man ordne der Folge F diejenige Folge F' zu, die aus F dadurch entsteht, daß in den ersten k Gliedern überall A durch B und B durch A ersetzt wird. Für diese Zuordnung gilt:

I. Die Folge F' ist jeweils eine (j+1)-Folge.

II. Sind zwei ungünstige j-Folgen F_1, F_2 voneinander verschieden, so auch ihre zugeordneten Folgen F_1', F_2'.

III. Jede (j+1)-Folge G ist die zugeordnete Folge G = F' einer ungünstigen j-Folge F. Wegen $j \geqq m$, also $j+1 > \frac{n}{2}$, enthält G nämlich mehr Glieder A als B; also gibt es eine kleinste Zahl $k \geqq 1$ derart, daß das k-te Glied A lautet, während sich unter den vorangehenden k-1 Gliedern ebenso viele Glieder B wie A befinden. Daher hat diejenige Folge F die verlangten Eigenschaften (ungünstige j-Folge mit F' = G zu sein), die aus G dadurch entsteht, daß in den ersten k Gliedern überall B durch A und A durch B ersetzt wird.

Mit I., II., III. ist die behauptete Anzahlgleichheit bewiesen.

Bezeichnet man die Anzahl aller j-Folgen mit a_j und die Anzahl aller günstigen j-Folgen mit g_j, so ergibt sich nach (1), (2), (3): Die Anzahl aller günstigen Folgen ist

$$\begin{aligned} g_0 + \dots + g_n &= g_m + \dots + g_{n-1} + g_n \\ &= (a_m - a_{m+1}) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + a_n \qquad (**) \\ &= a_m. \end{aligned}$$

Die Anzahl a_m aller m-Folgen ist bekanntlich $a_m = \binom{n}{m}$; die Anzahl aller zu berücksichtigenden n-gliedrigen Folgen überhaupt ist 2^n. Damit ergibt sich:

a) $w(4) = \binom{4}{2} : 2^4 = 6 : 16 = \frac{3}{8}$.

b) $w(n) = \binom{n}{m} : 2^n$ mit m aus (*)

Bemerkungen zu anderen Lösungsmöglichkeiten und zur Korrektur:
Der Wert w(4) kann auch durch Aufzählen aller günstigen viergliedrigen Folgen (AAAA), (AAAB), (AABB), (ABAA), (ABAB) gefunden werden.
Für ungerades n ist $\binom{n}{m} = \binom{n}{m+1}$; somit kann für jedes n statt m auch die kleinste ganze Zahl $m' \geqq \frac{n}{2}$ genommen werden.

Die Summation (**) kann auch durch Interpretation der Summanden (als Anzahlen) umschrieben werden, z. B. auch in grafischer Veranschaulichung.
Auch bei derartigen anderen Beschreibungsmöglichkeiten ist zu beachten: Aus der Darstellung soll ersichtlich sein, daß die Feststellungen I., II., III. (bzw. für anderen Beweisverlauf analog fundierende Aussagen) vorliegen. Eine gleichermaßen detaillierte Beschreibung ihres Zutreffens wird nicht in jedem Fall zu fordern sein.

271246B)Lösung: **7 Punkte**

Zur Abkürzung sei gesetzt:

$$\begin{aligned}
A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} &= 1 - f_1(1) - f_2(1) - f_3(1) - \ldots - f_{n-1}(1) - f_n(1),\\
A_n &= - f_1(0) - f_2(0) - f_3(0) - \ldots - f_{n-1}(0) - f_n(0),\\
A_{n+1} &= f_1(0) + f_2(1) + f_3(1) + \ldots + f_{n-1}(1) + f_n(1),\\
A_{n+2} &= f_1(1) + f_2(0) + f_3(1) + \ldots + f_{n-1}(1) + f_n(1),\\
&\ddots\\
A_{2n} &= f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + \ldots + f_{n-1}(1) + f_n(0).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{2n} = n - 1,$$

also $$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_{2n}| \geqq n - 1.$$

Daher muß für mindestens einen der 2n Summanden

$$|A_i| \geqq \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gelten; d. h.: Es gibt unter den Systemen

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) = {} & (1,1,1,\ldots,1,1),\\
& (0,0,0,\ldots,0,0);\\
& (0,1,1,\ldots,1,1),\\
& (1,0,1,\ldots,1,1),\\
& \ddots\\
& (1,1,1,\ldots,1,0)
\end{aligned}$$

mindestens eines, für das

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gilt; die Existenz solcher a_i war zu beweisen.