XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

271231

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, die das folgende Ungleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x^4 - 6x^2 + 8 \leqq 0, \qquad (1)$$

$$2x^2 - 3x > 0. \qquad (2)$$

271232

Ein Auto soll einen Rundkurs in einem vorgeschriebenen Umlaufsinn durchfahren. Das zur Verfügung stehende Benzin reicht genau zum einmaligen Durchfahren des Kurses, wurde aber vorher willkürlich in eine Anzahl $n \geqq 1$ von Kanistern verteilt, die ebenfalls willkürlich längs des Rundkurses aufgestellt sind. Der Tank des Autos ist zu Beginn leer und besitzt ausreichendes Fassungsvermögen, um beim Erreichen jedes Kanisters dessen Benzin aufzunehmen.
Man beweise, daß es möglich ist, den Startpunkt des Autos so zu wählen, daß der Kurs genau einmal durchfahren werden kann.
(Eventuelle Verluste beim Umfüllen, Mehrverbrauch bei wiederholtem Anfahren usw. sollen nicht berücksichtigt werden.)

Von den nachstehenden Aufgaben 271233A und 271233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

271233 A

Man ermittle den größten Wert, den der Flächeninhalt des Bildes eines beliebig im Raum liegenden Quaders Q mit gegebenen Kantenlängen a,b,c bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene annehmen kann.

271233 B

Es sei f diejenige für alle geordneten Paare (x,y) natürlicher Zahlen x, y definierte Funktion, die für alle natürlichen Zahlen x, y die folgenden Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt:

$$f(0,y) = y+1, \quad (1)$$
$$f(x+1,0) = f(x,1), \quad (2)$$
$$f(x+1,y+1) = f(x,f(x+1,y)). \quad (3)$$

Man ermittle

a) den Funktionswert f(3,3),

b) den Funktionswert f(4,2).

Hinweis: Gegebenenfalls kann die Angabe eines gesuchten Funktionswertes durch einen rechnerischen Ausdruck mit konkret angegebenen Rechenoperationen erfolgen, wenn deren zahlenmäßige Ausführung ohne Rechenhilfsmittel eine zu lange Rechenzeit erfordern würde.

A 11/12;II XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

271234

Man beweise für jedes Dreieck ABC: Bezeichnen wie üblich b, c, h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, so gilt

$$h_a \leqq \sqrt{bc} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

271235

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) ganzer Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$1243 \cdot (1 + yz) = 65 \cdot (xyz + x + z). \qquad (1)$$

271236

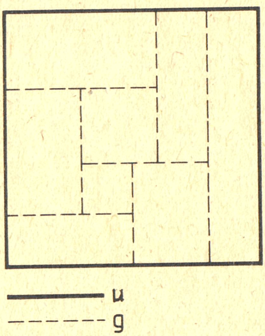

Abb. A 271236

Ein quadratisches Feld Q der Seitenlänge 10 km ist von einem Wassergraben u umgeben. Zur Bewässerung soll Q durch Anlegen weiterer Gräben g vollständig in rechteckige Teilfelder $F_1, F_2, \ldots, F_n$ zerlegt werden. (Die Breite der Gräben werde vernachlässigt; Abb. A 271236 zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung.)
Ferner werde gefordert, daß jeder Punkt der Fläche Q nicht weiter als 100 m von einem Wassergraben (u oder g) entfernt ist.

a) Man beweise: Wenn diese Forderung durch Gräben g einer Gesamtlänge von L Kilometern erfüllt wird, so folgt stets $L \geqq 480$.

b) Man beweise, daß es einen kleinsten Wert gibt, den L (bei Erfüllung der genannten Forderung) annehmen kann, und ermittle diesen Wert.

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

271231) Lösung: 5 Punkte

Die Ungleichung (1) ist der Reihe nach äquivalent mit

$$(x^2 - 2)(x^2 - 4) \leqq 0,$$

$$2 \leqq x^2 \leqq 4,$$

$$\sqrt{2} \leqq |x| \leqq 2,$$

$$- 2 \leqq x \leqq - \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{2} \leqq x \leqq 2. \qquad (3)$$

Die Ungleichung (2) ist äquivalent mit

$$x(2x - 3) > 0$$

und dies mit

$$x < 0 \quad \text{oder} \quad x > \frac{3}{2}. \qquad (4)$$

Also ist das Ungleichungssystem (1), (2) äquivalent damit, daß (3) und (4) gelten. Wegen $0 < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < 2$ ist dies äquivalent mit

$$- 2 \leqq x \leqq - \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{2} < x \leqq 2. \qquad (5)$$

Folglich erfüllen genau alle diejenigen reellen Zahlen x, für die (5) gilt, das Ungleichungssystem (1), (2).

Hinweis: Das Ergebnis kann auch so formuliert werden: Die Lösungsmenge von (1), (2) ist die Vereinigungsmenge der Intervalle

$$[- 2, - \sqrt{2}\,] \quad \text{und} \quad (\tfrac{3}{2}, 2\,].$$

Andere Lösungsmöglichkeit: Die in einem z,y-Koordinatensystem gebildete Kurve $y = z^2 - 6z + 8$, d. h. $y+1 = (z-3)^2$ ist eine nach oben geöffnete und so gelegene Normalparabel, daß ihr Scheitel die Koordinaten (3,-1) hat. Dem Verlauf dieser Parabel (z. B. genügend genau skizziert) kann man entnehmen, daß $z^2 - 6z + 8 \leqq 0$ genau für alle diejenigen nicht negativen z gilt, für die $2 \leqq z \leqq 4$ ist. Also gilt $x^4 - 6x^2 + 8 \leqq 0$ genau für alle x mit $\sqrt{2} \leqq |x| \leqq 2$, d. h. mit (3).

Analog kann man auch durch Diskussion der Parabel $y = 2x^2 - 3x$ zu (4) gelangen.

271232) Lösung: 6 Punkte

1. Im Fall $n = 1$ kann der einzige Kanister offenbar als Startpunkt gewählt werden.

2. Als Induktionsannahme werde vorausgesetzt, daß die Behauptung für $n = k$ Kanister zutrifft ($k \geqq 1$). Dann folgt für jede Aufstellung A von $k+1$ Kanistern:
   Unter den Kanistern der Aufstellung A befindet sich wenigstens ein Kanister C, von dem aus der nächste Kanister C' mit dem Inhalt von C erreicht werden kann; denn andernfalls wäre die Summe der Inhalte aller Kanister kleiner als eine für den Rundkurs ausreichende Gesamtmenge. Wird nun der Inhalt von C' in C umgefüllt und C' weggelassen, so entsteht eine Aufstellung A' von k Kanistern, zu der nach Induktionsannahme ein Standort existiert, von dem aus der Rundkurs durchfahren werden kann. Dieser Standort kann an keiner Stelle sein, die zwischen C und dem in der Aufstellung A übernächsten Kanister C'' liegt; denn er muß bei einem Kanister C_0 sein (sonst könnte das Auto dort nicht starten), und zwischen C und C'' steht bei der Aufstellung A' kein Kanister.
   Also enthält für die Aufstellung A' der mit C_0 beginnende Rundkurs auf der Strecke von C_0 bis C (die auch mit $C_0 = C$ entartet sein kann) dieselben Standorte wie für A. Dann folgt die Strecke von C bis zu C'', und danach folgt auf der Strecke von C'' bis C_0 (die auch mit $C_0 = C''$ entartet sein kann) wieder dieselbe Standortverteilung für A' wie für A.
   Damit ergibt sich für die Aufstellung A: Nach einem Start in C_0 kann wie bei A' bis C gefahren werden. Anschließend würde (nach Voraussetzung über A') das im Auto und in C und in C' zusammen vorhandene Benzin reichen; daraus (und weil schon der Inhalt von C bis C' reicht) folgt: Das im Auto und in C vorhandene Benzin reicht bis C', und von dort kommt man durch Hinzufügen des Benzins aus C' bis C''. Von dort schließlich gelangt man wie bei A' bis C_0.
   Also hat sich ergeben, daß bei der Aufstellung A der Rundkurs von C_0 aus durchfahren werden kann; d. h., die Behauptung gilt auch für $n = k+1$ Kanister.

Mit 1. und 2. ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ bewiesen.

Anderer Lösungsweg: Zunächst wird angenommen, daß der Tank des Autos zu Beginn nicht leer ist, sondern genausoviel Benzin enthält, wie zum einmaligen Durchfahren des Rundkurses notwendig ist. Es wird eine Proberunde mit beliebigem Startpunkt gefahren, wobei der Tankinhalt während der gesamten Fahrt registriert wird, bei Halt an einem Kanister vor und nach dem Nachtanken. Am Ende der Fahrt ist der Tankinhalt genau so groß wie zu Beginn. Wählte man einen der Punkte mit minimalem Tankinhalt (dieser fällt mit dem Standpunkt eines der Kanister zusammen) als Startpunkt für die Wertungsrunde (die mit leerem Tank begonnen wird), so ist der Tankinhalt stets nichtnegativ.

271233 A) Lösung: 8 Punkte

I. Da bei jeder Parallelprojektion parallele Geraden wieder in parallele Geraden übergehen (falls ihr Bild nicht zu je einem Punkt entartet), haben die Seitenflächen ABCD, EFGH, ABFE, DCGH, ADHE, BCGF von Q Parallelogramme A'B'C'D', E'F'G'H', A'B'F'E', D'C'G'H', A'D'H'E', B'C'G'F' als Bilder (wobei jeweils ein Parallelogramm XYVW auch entarten kann zu einer Strecke XV, auf der Y und W so liegen, daß $\overline{XY} = \overline{WV}$ gilt). Bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen A, ..., H liegen diese Parallelogramme so[1], daß das Bild von Q ein Sechseck A'B'C'G'H'E' ist, das die Punkte D' und F' in seiner Fläche enthält (Abb. L 271233 A a), wobei in Entartungsfällen[2] D' auf genau einer der Strecken A'B', A'E' liegen (Abb. L 271233 A b, o. B. d. A. mit D' auf A'B') oder mit A' zusammenfallen kann (Abb. L 271233 A c).

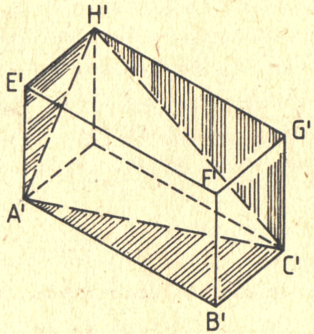

Abb. L 271233 A a

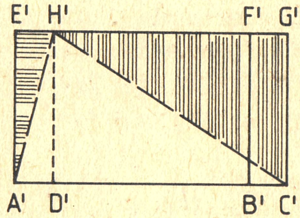

Abb. L 271233 A b

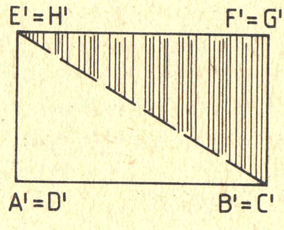

Abb. L 271233 A c

II. Der Flächeninhalt dieses Sechsecks ist doppelt so groß wie der des Dreiecks A'C'H', da die Strecken A'C', C'H', H'A' als Diagonalen die Parallelogrammflächen A'B'C'D', C'G'H'D', H'E'A'D' halbieren.

Das Bild eines Dreiecks bei senkrechter Parallelprojektion hat genau dann einen maximalen Flächeninhalt, wenn Original- und Bildebene zueinander parallel sind; in diesem Falle ist der Flächeninhalt des Bildes gleich dem Flächeninhalt des Originaldreiecks.

Also ist der gesuchte maximale Flächeninhalt I_{max} des Bildes von Q gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ACH.

III. Wegen der gegebenen Kantenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$, $c = \overline{AE}$ hat das Dreieck ACH die Seitenlängen

$$m = \overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2},\quad n = \overline{CH} = \sqrt{a^2 + c^2},\quad p = \overline{AH} = \sqrt{b^2 + c^2};$$

nach der Heronischen Formel ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} I_{max} &= 2 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{(m+n+p)(m+n-p)(p+m-n)(p-m+n)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + 2mn + n^2 - p^2)(p^2 - m^2 + 2mn - n^2)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4m^2n^2 - (m^2 + n^2 - p^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - (2a^2)^2} \\ &= \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}. \end{aligned} \qquad (1)$$

<u>Andere Möglichkeit</u> zu III: Man kann ein Koordinatensystem so wählen, daß A, C, H die Koordinaten (0,0,0), (a,b,0), (0,b,c) haben. Hiernach hat das Dreieck ACH den doppelten Flächeninhalt

$$|(a,b,0) \times (0,b,c)| = |(bc, -ac, ab)|,$$

womit (1) folgt.

---

1 Diese Aussagen können anschaulich gewonnen sein; eine abstrakte Beweisführung (Diskussion der Lagemöglichkeiten für A', ..., H' bezüglich der Halbebenen, die von Verbindungsgeraden dieser Punkte begrenzt werden) wird nicht vom Schüler verlangt.

2 In den Entartungsfällen wird bei senkrechter Parallelprojektion das Parallelogramm A'C'G'E' zum Rechteck. Die Angabe (bzw. zeichnerische Berücksichtigung) dieses Sachverhalts wird für den folgenden Lösungsweg nicht benötigt (die Entartungsfälle ergeben, wie in II. gezeigt wird, keinen maximalen Flächeninhalt, und die Beweisführung bis dahin verwendet nur die Parallelogrammeigenschaften).

271233 B) Lösung: 8 Punkte

1. Behauptung: Für alle $y = 0, 1, 2, \ldots$ gilt
   $f(1,y) = y+2.$ (4)

Beweis durch vollständige Induktion:

I. Nach (2) und (1) gilt $f(1,0) = f(0,1) = 2.$

II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (4), sowie aus (1)

$$f(1,y+1) = f(0,f(1,y)) = f(0,y+2) = y+3$$
$$= (y+1) + 2,$$

also (4) mit y+1 statt y.

2. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2, \ldots$ gilt
   $f(2,y) = 2y+3.$ (5)

Beweis:

I. Nach (2) und (4) gilt $f(2,0) = f(1,1) = 3.$

II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (5), sowie aus (4)

$$f(2,y+1) = f(1,f(2,y)) = f(1,2y+3) = 2y+5$$
$$= 2(y+1) + 3.$$

3. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,\ldots$ gilt
   $f(3,y) = 2^{y+3} - 3.$ (6)

Beweis:

I. Nach (2) und (5) gilt $f(3,0) = f(2,1) = 5 = 2^3 - 3.$

II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (6), sowie aus (5)

$$f(3,y+1) = f(2,f(3,y)) = f(2,2^{y+3} - 3) = 2(2^{y+3} - 3) + 3$$
$$= 2^{(y+1)+3} - 3.$$

a) Aus (6) ergibt sich $f(3,3) = 2^6 - 3 = 61.$

b) Aus (2), (3) und (6) ergibt sich

$$f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3 = 13,$$

$$f(4,1) = f(3,f(4,0)) = f(3,13) = 2^{16} - 3 = 65533,$$

$$f(4,2) = f(3,f(4,1)) = f(3,65533) = 2^{65533} - 3.$$

Bemerkungen:

1. Das letzte Ergebnis kann auch in der Form $f(4,2) = 2^{2^{16}} - 3$ akzeptiert werden.

2. Zu b) kann auch die allgemeine Aussage

$$f(4,y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3$$ (worin die 2 insgesamt (y+3)-mal auftritt)

durch vollständige Induktion bewiesen werden.

3. Es genügt jedoch auch, einige der allgemeinen Aussagen (4), (5), (6) durch die Ermittlung einzelner Funktionswerte zu ersetzen. Beispielsweise genügt zu a) die Ermittlung der Funktionswerte $f(x,y)$ für
$x = 0;\ y = 1,2,\ldots,60,$
$x = 1;\ y = 0,1,\ldots,59,$
$x = 2;\ y = 0,1,\ldots,29,$
$x = 3;\ y = 0,1,2,3.$

Urschrift

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

271234) Lösung: 6 Punkte

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist sowohl gleich $\frac{1}{2}ah_a$ (mit $a = \overline{BC}$) als auch gleich $\frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$. Hiernach und nach der Formel
$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ gilt

$$h_a = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{2bc \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{a}. \qquad (2)$$

Nach dem Kosinussatz sowie nach der Formel $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$ gilt ferner

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\ &= (b-c)^2 + 4bc \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ &\geq 4bc \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich wegen

$$a,\ b,\ c,\ \sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2} > 0 \qquad (4)$$

die Behauptung

$$h_a \leq \frac{2bc \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{bc} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{bc} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Wegen (4) gilt darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (3) gilt, d. h. genau für alle diejenigen Dreiecke ABC, in denen b = c ist.

271235) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn x, y, z ganze Zahlen sind, die (1) erfüllen, so folgt: Da 1243 zu 65 teilerfremd ist, muß $1 + yz$ durch 65 teilbar sein; d. h., eine ganze Zahl k mit

$$1 + yz = 65 \cdot k \qquad (2)$$

muß existieren. Aus (1) folgt damit $65 \cdot (xyz + x + z) = 1243 \cdot 65 \cdot k$, also

$$(1 + yz) \cdot x + z = 1243 \cdot k.$$

Mit (2) ergibt das $65 \cdot k \cdot x + z = 1243 \cdot k$, also

$$z = (1243 - 65 \cdot x) \cdot k. \qquad (3)$$

Setzt man dies in die aus (2) folgende Gleichung $65 \cdot k - yz = 1$ ein, so folgt

$$(65 - y(1243 - 65 \cdot x)) \cdot k = 1.$$

Dies kann wegen der Ganzzahligkeit der Faktoren nur mit

$$65 - y(1243 - 65 \cdot x) = k = \pm 1 \qquad (4)$$

erfüllt werden. Somit gilt

$$y(1243 - 65 \cdot x) = 64 \quad \text{oder} \quad y(1243 - 65 \cdot x) = 66; \qquad (5)$$

d, h., es ist

$$1243 - 65 \cdot x \text{ Teiler von 64 oder von 66.} \qquad (6)$$

Daraus folgt insbesondere

$$-66 \leqq 1243 - 65 \cdot x \leqq 66,$$

$$1177 \leqq 65 \cdot x \leqq 1309,$$

$$x = 19 \quad \text{oder} \quad x = 20,$$

$$1243 - 65 \cdot x = 8 \quad \text{oder} \quad 1243 - 65 \cdot x = -57. \qquad (7)$$

Die Bedingungen (6) und (7) werden nur von $1243 - 65 \cdot x = 8$, also $x = 19$ erfüllt, wegen (5) zusammen mit $y = 8$, wonach (4) auf $k = 1$ und daher (3) auf $z = 8$ führt.

Also kann unter allen Tripeln ganzer Zahlen nur

$$(x,y,z) = (19,8,8) \qquad (8)$$

die Gleichung (1) erfüllen.

II. Wie aus $1243 \cdot (1+8\cdot8) = 1243 \cdot 65 = 65 \cdot (19\cdot8\cdot8+19+8)$ ersichtlich ist, erfüllt es diese Gleichung.

Mit I. und II ist gezeigt, daß genau das in (8) genannte Tripel die Forderungen der Aufgabe erfüllt.

Bemerkung: Da die für ganzzahlige x,y,z gestellte Forderung (1) nicht mit $z = 0$ oder mit $1+yz = 0$ erfüllt werden kann, ist sie äquivalent zu $\frac{1243}{65} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$. Andererseits gilt $\frac{1243}{65} = 19 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8}}$ (man erhält dies z. B. mit dem Euklidischen Algorithmus). Aus der Theorie der Kettenbrüche folgt dann, daß (19,8,8) das einzige Tripel natürlicher Zahlen ist, das (1) erfüllt. Da jedoch in der Aufgabe auch negative x,y,z zugelassen sind, genügt diese Aussage noch nicht für den Eindeutigkeitsnachweis I.

271236) Lösung: 8 Punkte

Für jede Zerlegung Z in Felder $F_1, F_2, \ldots, F_n$, die die genannte Forderung erfüllt, seien die Längenmaßzahlen der Seiten von F_i jeweils so mit a_i, b_i bezeichnet, daß $a_i \leq b_i$ gilt. Aus der Forderung folgt dann $a_i \leqq 0{,}2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Da der Flächeninhalt des Feldes Q gleich der Summe der Flächeninhalte der F_i ist, folgt hieraus

$$100 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqq \sum_{i=1}^{n} 0{,}2 \cdot b_i = 0{,}2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

also $\sum_{i=1}^{n} b_i \geqq 500.$ (1)

Addiert man die Umfänge der Felder F_i, so erhält man die Summe aus der Länge von u und der doppelten Länge von g; d. h., es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} 2(a_i + b_i) = 40 + 2L.$$

Hieraus und aus (1) folgt

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 2(a_i + b_i) - 40\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i - 20$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{n} a_i + 480. \qquad (2)$$

a) Da alle $a_i \geqq 0$ sind, folgt aus (2), wie behauptet, $L \geqq 480$.

b) Eine der beiden Richtungen von Gräben werde "horizontal", die andere "vertikal" genannt. Ein Feld F_i heiße horizontal bzw. vertikal je nachdem, ob b_i die Längenmaßzahl seiner horizontalen oder seiner vertikalen Seiten ist. Nun trifft stets einer der beiden folgenden Fälle I., II. ein:

I. Wenn es eine horizontale Strecke gibt, die das Feld Q durchquert und dabei nur mit vertikalen Feldern der Zerlegung Z nichtleere Durchschnittehat, so ist die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Durchschnitte gleich 10; also gilt erst recht

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq 10. \qquad (3)$$

II. Wenn aber jede horizontale Strecke, die das Feld Q durchquert, mit mindestens einem horizontalen Feld der Zerlegung Z nichtleeren Durchschnitt hat, so folgt, indem man alle diese horizontalen Felder auf eine vertikale Gerade projiziert: Diese Projektionen überdecken eine gesamte vertikale Strecke der Länge 10 km; d. h., die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Projektionen ist größer oder gleich 10, also ergibt sich ebenfalls (3).

Somit gilt (3) für jede Zerlegung Z der geforderten Art; hiernach folgt aus (2) für jede solche Zerlegung

$$L \geqq 490. \qquad (4)$$

Ferner gilt: es gibt eine Zerlegung der geforderten Art mit

$$L = 490,$$

z. B. die Zerlegung in 50 vertikale Felder mit $a_i = 0{,}2$ und $b_i = 10$, die genau 49 Gräben g aufweist, deren jeder die Länge 10 km hat.

Damit ist, wie gefordert, die Existenz eines kleinsten Wertes für L bewiesen; er beträgt 490.

Bemerkung: Man kann auch sogleich mit der Lösung von b) beginnen und (4) beweisen; damit ist dann erst recht bereits a) gelöst.