XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>271221</u>

Man ermittle alle Paare (x, y) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x\left(1 + \frac{x}{y}\right) = 6, \tag{1}$$

$$y\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 3. \tag{2}$$

<u>271222</u>

Es sei ABCD ein beliebiges ebenes konvexes Viereck; k sei eine beliebige positive reelle Zahl. Die Punkte P, Q, R, S mögen in dieser Reihenfolge die Seiten AB, BC, CD, DA dieses Vierecks jeweils im Verhältnis k : 1 teilen.

Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Vierecke PQRS und ABCD.

<u>271223</u>

(a) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion f (mit dem Definitionsbereich aller rellen $x \neq 0$) durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-2)x^k$$

definiert. Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die so erklärte Funktion f die Gleichung $f(-1) = -f(1)$ erfüllt.

A 11/12

(b) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion g (mit demselben Definitionsbereich) durch

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k-2} \cdot x^k$$

definiert.

Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die die so erklärte Funktion g die Gleichung $g(-1) = -g(1)$ erfüllt.

271224

(a) Über eine Menge M, die aus genau 1987 Personen besteht, wird vorausgesetzt, daß jede Person aus M mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt ist.
Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Es gibt eine aus mindestens 332 Personen bestehende Untermenge U von M mit der Eigenschaft, daß keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.

(b) Man gebe ein Beispiel für eine Menge M aus genau 1988 Personen, für die folgende Aussagen zutreffen: Jede Person aus M ist mit genau 5 Personen aus M bekannt; jede Untermenge U von M mit der Eigenschaft, daß keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist, besteht aus höchstens 333 Personen.

In diesen Aufgaben werde stets angenommen, daß eine Person X genau dann mit einer Person Y bekannt ist, wenn Y mit X bekannt ist.

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

271221) Lösung: 9 Punkte

I. Wenn reelle Zahlen $x \neq 0$, $y \neq 0$ das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen, so folgt

$$xy + x^2 = 6y, \tag{3}$$

$$xy + y^2 = 3x. \tag{4}$$

Aus (4) folgt $x(3-y) = y^2$, daraus zunächst $y \neq 3$ (da $y = 3$ den Widerspruch $0 = 9$ ergäbe) und dann

$$x = \frac{y^2}{3-y}. \tag{5}$$

Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich

$$\frac{y^3}{3-y} + \frac{y^4}{(3-y)^2} = 6y,$$

nach Division durch y ($\neq 0$) und Multiplikation mit $(3-y)^2$ also

$$y^2(3-y) + y^3 = 6(3-y)^2,$$

$$y^2 - 12y + 18 = 0.$$

Daher ist y eine der Zahlen

$$y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36-18} = 3(2 \pm \sqrt{2}).$$

Als zugehörige Werte für x erhält man wegen

$$y_{1,2}^2 = 9(4 \pm 4\sqrt{2} + 2) = 18(3 \pm 2\sqrt{2}),$$

$$3 - y_{1,2} = -3(1 \pm \sqrt{2})$$

nach (5), indem man noch mit $(1 \mp \sqrt{2})$ erweitert und $(1 \pm \sqrt{2})(1 \mp \sqrt{2}) = -1$ beachtet,

$$x_{1,2} = 6(3 \pm 2\sqrt{2})(1 \mp \sqrt{2}) = 6(-1 \mp \sqrt{2}).$$

Daher können nur die Paare

$$(6(-1-\sqrt{2}),\ 3(2+\sqrt{2})),\ (6(-1+\sqrt{2}),\ 3(2-\sqrt{2})) \tag{6}$$

das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

II. Wenn (x,y) eines dieser Paare ist, so ist $x \neq 0$, $y \neq 0$ und (jeweils entweder mit dem oberen oder mit dem unteren Vorzeichen)

$$\frac{x}{y} = \frac{2(-1\mp\sqrt{2})(2\mp\sqrt{2})}{(2\pm\sqrt{2})(2\mp\sqrt{2})} = (-1\mp\sqrt{2})(2\mp\sqrt{2}) = \mp\sqrt{2},$$

$$\frac{y}{x} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

also $\quad x\left(1 + \frac{x}{y}\right) = 6(-1\mp\sqrt{2})(1\mp\sqrt{2}) = 6$

und $\quad y\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 3(2\pm\sqrt{2})(1\mp\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 3.$

Also erfüllen beide Paare (6) das Gleichungssystem (1), (2).

Mit I. und II. ist bewiesen, daß in (6) alle gesuchten Paare angegeben sind.

Andere Lösungsmöglichkeiten:

Statt II. in der üblichen Form als Probe durchzuführen, kann man auch bestätigen: Für beide Paare (6) gilt außer $x \neq 0$, $y \neq 0$ auch $y \neq 3$. Daher lassen sich alle in I. durchgeführten Schlüsse einzeln umkehren, womit man (ohne neuen Rechenaufwand) von (6) zu (1), (2) gelangt. Dies muß allerdings - für eine Wertung als vollständige Lösung - aus der vom Schüler gegebenen Darstellung hervorgehen.

Statt des "ohne Trick" auskommenden Vorgehens in I. (eine Gleichung, in der eine Unbekannte linear vorkommt, nach dieser auflösen, das Ergebnis in die andere Gleichung einsetzen), kann man auch "eleganter" eliminieren. Naheliegend ist z. B., erst $z = \frac{x}{y}$ zu ermitteln: Dividiert man etwa (1) durch (2) und beachtet $1 + \frac{1}{z} = -(1 + z)$, so folgt $z^2 = 2$, also $y = \pm x\sqrt{2}$. Dies wird dann in (1) oder (2) eingesetzt usw.

Statt (6) sind auch andere Darstellungen der Lösungspaare möglich, insbesondere wegen $-1\pm\sqrt{2} = \frac{1}{1\pm\sqrt{2}}$, $2\pm\sqrt{2} = \frac{2}{2\mp\sqrt{2}}$ auch solche mit auftretenden Nennern.

271222) Lösung: 10 Punkte

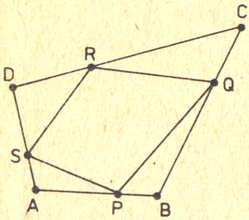

Abb. L 271222

Ist $XY\ldots Z$ ein Polygon, so bezeichne $J(XY\ldots Z)$ seinen Flächeninhalt. Aus der Voraussetzung $\overline{AP} : \overline{PB} = k : 1$ folgt

$$\overline{AP} = \frac{k}{k+1} \cdot \overline{AB}, \quad \overline{PB} = \frac{1}{k+1} \cdot \overline{AB}.$$

Da die Dreiecke PBQ und ABQ die gleiche zur Seite PB bzw. AB senkrechte Höhe haben, folgt

$$J(ABQ) = \frac{k}{k+1} \cdot J(ABC)$$

und damit

$$J(PBQ) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot J(ABC).$$

(Dies kann auch vermittels $J(PBQ) = \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{BQ} \cdot \sin \overline{\sphericalangle PBQ} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \overline{AB} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \overline{\sphericalangle ABC}$ erhalten werden.)

Entsprechend folgt $$J(RDS) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot J(CDA)$$

und damit $$J(PBQ) + J(RDS) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot J(ABCD).$$

Entsprechend ist auch $$J(SAP) + J(QCR) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot J(ABCD),$$

und damit folgt insgesamt

$$J(PQRS) = J(ABCD) - J(SAP) - J(PBQ) - J(QCR) - J(RDS)$$
$$= J(ABCD) \cdot \left(1 - \frac{2k}{(k+1)^2}\right),$$
$$\frac{J(PQRS)}{J(ABCD)} = \frac{k^2+1}{(k+1)^2}.$$

271223) Lösung: 10 Punkte

(a) Es gilt genau dann $f(-1) = -f(1)$, wenn $f(1) + f(-1) = 0$ gilt.

Für jede natürliche Zahl n ist nun

$$f(1) = (-2)+(-1)+0+1+2+3+\ldots+(n-2)$$

und $$f(-1) = (-2)-(-1)+0-1+2-3+-\ldots+(-1)^{n-2}(n-2).$$

Daraus folgt: Ist n gerade, etwa $n = 2m$ mit natürlichem m, so gilt

$$f(1)+f(-1) = 2((-2)+0+2+\ldots+(2m-2)); \qquad (1)$$

ist n ungerade, etwa $n = 2m+1$ mit natürlichem m, so gilt (für dieses m) ebenfalls die Gleichung (1). Für $m = 0, 1, 2$ nimmt die rechte Seite von (1) die Werte $2(-2)$, $2(-2)$, $2 \cdot 0$ an, für größere m kommen nur noch positive Summanden hinzu. Also gilt $f(1)+f(-1) = 0$ genau für $m = 2$; damit ist gezeigt:

$f(-1) = -f(1)$ gilt genau für $n = 4$ und $n = 5$.

(b) Es gilt genau dann $g(-1) = -g(1)$, wenn $g(1) + g(-1) = 0$ gilt. Für jede natürliche Zahl n ist

$$g(1) = \frac{1}{-2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{3n-2}$$

und $$g(-1) = \frac{1}{-2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + - \ldots + (-1)^{n-2} \cdot \frac{1}{3n-2}$$

Daraus folgt: Ist mit natürlichem m entweder $n = 2m$ oder $n = 2m+1$, so ist

$$g(1)+g(-1) = 2\left(\frac{1}{-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{6m-2}\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{3m-1}.$$

Für $m \leqq 5$ ist nun $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{3m-1} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14}$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{21} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

also $g(1)+g(-1) < 0$;

für $m \geqq 6$ ist aber bereits

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{3m-1} \geqq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17}$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} = 1,$$

also $g(1)+g(-1) > 0$.

Daher gibt es keine natürliche Zahl m mit $g(1)+g(-1) = 0$ und folglich auch keine natürliche Zahl n mit $g(-1) = -g(1)$.

Hinweis zur Korrektur: Beim Abschätzen von Summen der Art $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots$ unter Verwendung von Näherungswerten der Summanden (etwa mit einem Taschenrechner gefunden) muß aus der Darstellung ersichtlich sein, daß die Abschätzung auch unter Berücksichtigung von Rundungsfehlern gültig bleibt.

271224) Lösung: 11 Punkte

(a) Nach Voraussetzung lassen sich die Personen aus M folgendermaßen mit $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{1986}$ bezeichnen:

P_0 sei eine beliebige Person aus M. Da sie mit höchsten 5 anderen bekannt ist, kann die Bezeichnung so gewählt werden, daß gilt:

P_0 ist mit keiner der Personen $P_6, P_7, \ldots, P_{1986}$ bekannt. (0)

P_6 ist mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt, also erst recht mit höchstens 5 der Personen $P_7, P_8, \ldots, P_{1986}$.
Man kann daher deren Bezeichnung, ohne daß (0) beeinträchtigt wird, so wählen, daß zusätzlich gilt:

P_6 ist mit keiner der Personen $P_{12}, P_{13}, \ldots, P_{1986}$ bekannt. (1)

In dieser Weise kann man fortsetzen (und außer für n = 0, n = 1) für weitere n = 2, 3, ... erhalten:

P_{6n} ist mit keiner der Personen $P_{6n+6}, P_{6n+7}, \ldots, P_{1986}$ bekannt. (n)

Als letzte dieser Aussagen erhält man für n = 330:

P_{1980} ist nicht mit P_{1986} bekannt. (330)

Die Menge $U = \{P_0, P_6, \ldots, P_{1980}, P_{1986}\}$, die aus 332 Personen besteht, hat hiernach die besagte Eigenschaft, daß keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.

(b) Ein Beispiel der geforderten Art kann folgendermaßen gegeben werden:

Es sei $M = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{1987}\}$. Für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots, 329$ sei definiert: In der Menge A_n der 6 Personen P_{6n+i} $(i = 0, \ldots, 5)$ ist jede mit jeder anderen bekannt (Abb. L 271224a).

In der Menge B der 8 Personen P_{1980+i} $(i = 0, \ldots, 7)$ seien die Bekanntschaften wie in Abbildung L 271224b definiert.
Darüber hinaus seien in M keine Bekanntschaften vorhanden.
Nach dieser Definition ist einerseits, wie gefordert, jede Person aus M mit genau 5 anderen Personen aus M bekannt.

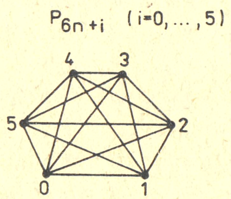

Abb. L 271224a

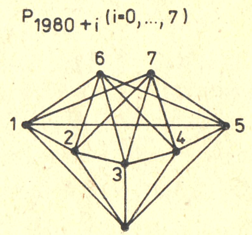

Abb. L 271224b

Wenn andererseits U irgendeine Untermenge von M ist, die mehr als 333 Personen enthält, so kann folgendermaßen bewiesen werden, daß mindestens eine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist:

Da U mindestens 334 Personen enthält, muß U entweder mit (mindestens) einer der 330 Mengen A_0, A_1, ..., A_{329} mehr als eine Person gemeinsam haben oder andererseits mit der Menge B mindestens 4 Personen gemeinsam haben.

Im ersten Fall sind die beiden Personen, die U (mindestens) mit der betreffenden Menge A_n gemeinsam hat, miteinander bekannt.

Im zweiten Fall gilt: Gehören etwa (mindestens) die 4 Personen X_0, X_1, X_2, X_3 aus B zu U, so gibt es außer ihnen nur 4 weitere Personen in B, also muß X_0, da mit 5 anderen Personen aus B bekannt, mit einer der Personen X_1, X_2, X_3 bekannt sein.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

271221

Auflösen nach einer Variablen (z. B. (5))	3 Punkte
Herleiten einer Gleichung mit einer Variablen (z. B. $y^2 - 12y + 18 = 0$)	2 Punkte
Angabe der Lösungspaare	2 Punkte
Probe	2 Punkte
	9 Punkte

271222

Herleiten von $J(PBQ) = \frac{k}{(k+1)^2} J(ABC)$	3 Punkte
Herleiten von $J(PBQ) + J(RDS) = \frac{k}{(k+1)^2} J(ABCD)$	3 Punkte
Ermitteln des Verhältnisses $\frac{J(PQRS)}{J(ABCD)} = \frac{k^2+1}{(k+1)^2}$	4 Punkte
	10 Punkte

271223

a) Herleiten einer Beziehung zwischen f(1) und f(-1) (z. B. (1))	2 Punkte
Begründung dafür, daß $f(1) + f(-1) = 0$ genau für $n = 4$ und $n = 5$ gilt	2 Punkte
b) Herleiten einer Beziehung zwischen g(1) und g(-1) (z. B. $g(1) + g(-1) = \ldots$)	2 Punkte
Nachweis, daß $g(1) + g(-1) \neq 0$ ist (bei Fallunterscheidung wie im Lösungsvorschlag für die Fälle $m \leq 5$ und $m \geq 6$ jeweils 2 Punkte)	4 Punkte
	10 Punkte

271224

a)	6 Punkte
b)	5 Punkte
	11 Punkte