Kunlauft

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen.

271041

Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

271042

Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1, x_2 die folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3), \quad (1)$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1). \quad (2)$$

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2 + \sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

on den nachstehenden Aufgaben 271043A und 271043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

A 10;I

271043A

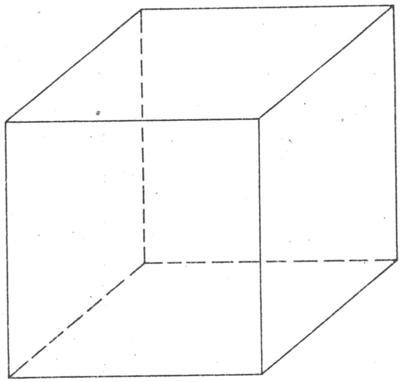

Abb. A 271043A

Die Abbildung A 271043A wird gewöhnlich als das Bild eines Würfels oder jedenfalls eines achteckigen Körpers in schräger Parallelprojektion angesehen.

Zeigen Sie, daß dies aber auch sowohl das Bild eines zehneckigen als auch das Bild eines zwölfeckigen Körpers in schräger Parallelprojektion sein kann!

Zeichnen Sie zu diesem Zweck je einen solchen Körper in einer neu gewählten schrägen Parallelprojektion, bei der alle zehn bzw. alle zwölf Eckpunkte des Körpers als voneinander verschiedene Bildpunkte erscheinen! Geben Sie ferner zu jedem der beiden Körper eine Aufzählung aller Eckpunkte, aller Kanten und aller ebenen Teilflächen seiner Oberfläche an, und nennen Sie eine Gerade in einer Projektionsrichtung, bei der das Bild A 271043A entstehen würde! Eine weitere Begründung wird nicht verlangt.

271043B

Ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ besagt: Aus einem Näherungswert $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b positive ganze Zahlen sind, wird ein neuer Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ nach der Vorschrift

$$a' = a^2 + 2b^2, \qquad (1)$$

$$b' = 2ab \qquad (2)$$

gewonnen. Um einschätzen zu können, ob $\frac{a}{b}$ ein geeigneter Anfangswert für dieses Verfahren sein kann, behandelt man die folgende Aufgabe (bei der die Zahl $\sqrt{2}$ wie ein bekannter Wert verwendet wird): Man ermittle alle diejenigen $\frac{a}{b}$ (a,b positive ganze Zahlen), bei denen die Vorschrift (1), (2) auf einen besseren Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ führt, d. h.,

$$\left|\frac{a'}{b'} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$$

gilt.

Umlauf

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

271044

Ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 10$ cm und ein Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \frac{10}{\sqrt{3}}$ cm seien so in einer Ebene gelegen, daß der Mittelpunkt von k_2 außerhalb von k_1 liegt und daß sich k_1 und k_2 in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, für die $\overline{P_1P_2} = 10$ cm gilt. Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des gemeinsamen Flächenstücks der beiden Kreisflächen!

Hinweis: Entsprechend wie bei der obigen Angabe von r_2 soll die zahlenmäßige Angabe von A erfolgen, ohne dabei Näherungswerte (z. B. endliche Dezimalbrüche) für irrationale Zahlen zu verwenden.

271045

Worte aus den Buchstaben E, R und S sollen nach folgenden Regeln aus einem zu Anfang vorgegebenen Wort gebildet werden:

(1) Endet ein Wort auf S, so kann ein R angefügt werden.
(2) An ein Wort darf dasjenige Wort angefügt werden, welches aus den gleichen Buchstaben, aber in umgekehrter Reihenfolge besteht.
(3) Treten in einem Wort drei gleiche Buchstaben unmittelbar hintereinander auf, dann dürfen sie durch ein R ersetzt werden.
(4) Zwei aufeinanderfolgende R oder E dürfen weggelassen werden.

Eine beliebige Wahl der Reihenfolge und beliebig häufige Wiederholung der Regelanwendungen sind zugelassen.

Ist es möglich, durch genügend häufige Anwendung dieser Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten?

A 10;II

<u>271046</u>

Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn für reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 gilt, daß jede dieser Zahlen im Intervall $5 \leqq x \leqq 10$ liegt, dann gilt für diese Zahlen stets

$$2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_5b_5) \leqq a_1^2+b_1^2 + a_2^2+b_2^2 +\ldots + a_5^2+b_5^2$$
$$\leqq \frac{5}{2} \cdot (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_5b_5).$$

Umlauft

L 10;I

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

271041) Lösung: **6 Punkte**

Es sei f die durch
$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10$$
$$= (x-2)^4 + x^2 - 2x - 6$$
$$= (x-2)^4 + (x-1)^2 - 7$$
definierte Funktion. Für sie gilt:

(1) Es ist $f(0) = 10 > 0$.

(2) Für alle x im Intervall $1 \leqq x \leqq 2$ ist
$$-1 \leqq x - 2 \leqq 0, \quad \text{also } (x-2)^4 \leqq 1, \text{ und}$$
$$0 \leqq x - 1 \leqq 1, \quad \text{also } (x-1)^2 \leqq 1, \text{ also}$$
$$f(x) \leqq 1 + 1 - 7 < 0.$$

(3) Es ist $f(4) = 16 + 9 - 7 > 0$.

(4) Im Intervall aller $x < 1$ ist f streng monoton fallend; denn aus $x_1 < x_2 < 1$ folgt
$$x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0, \text{ also } (x_1 - 2)^4 > (x_2 - 2)^4, \text{ und}$$
$$x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0, \text{ also } (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2,$$
$$\text{also } f(x_1) > f(x_2).$$

(5) Im Intervall aller $x > 2$ ist f streng monoton steigend; denn aus $2 < x_1 < x_2$ folgt
$$0 < x_1 - 2 < x_2 - 2, \text{ also } (x_1 - 2)^4 < (x_2 - 2)^4, \text{ und}$$
$$0 < x_1 - 1 < x_2 - 1, \text{ also } (x_1 - 1)^2 < (x_1 - 1)^2,$$
$$\text{also } f(x_1) < f(x_2).$$

Wegen (1), (2) gibt es im Intervall (0;1) und wegen (2), (3) im Intervall (2;4) aufgrund der Stetigkeit von f je (mindestens) eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Wegen (4) gibt es unter allen $x < 1$ und wegen (5) unter allen $x > 2$ auch jeweils keine weitere Lösung; wegen (2) liegt auch im Intervall [1;2] keine Lösung. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

271042) Lösung: 7 Punkte

Aus (1) mit $x_1 = x_2 = 0$ folgt $f(0) = f(0) + f(0)$, also $f(0) = 0$.
Aus (2) mit $x_1 = x_2 = 1$ folgt $f(1) = f(1) + f(1)$, also $f(1) = 0$.

Für jedes reelle x folgt aus (1) mit $x_1 = x$, $x_2 = 0$ ferner $f(x) = f(x^3) + f(0) = f(x^3)$. Somit besagt (1) auch, daß für alle reellen Zahlen x_1, x_2

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{3}$$

gilt. Für jedes reelle x folgt aus (3) mit $x_1 = x$, $x_2 = 1$ ferner $f(x + 1) = f(x) + f(1) = f(x)$. Somit ergibt sich der Reihe nach

$$f(2) = 0,\ f(3) = 0,\ f(4) = 0,\ f(5) = 0. \tag{4}$$

Aus (2) mit $x_1 = x_2 = \sqrt{5}$ folgt $f(5) = \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5})$ und daraus

$$f(\sqrt{5}) = 0. \tag{5}$$

Damit folgt aus (3), (4), (5), daß der gesuchte Funktionswert eindeutig bestimmt ist; er ergibt sich zu

$$\begin{aligned} f(2 + \sqrt{5}) &= f(2) + f(\sqrt{5}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es gibt auch Lösungswege ohne den Übergang zu (3), z. B.:

Für die Zahl $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ist $a^2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = a + 1$, $a^3 = 2 + \sqrt{5}$.

Damit folgt (nachdem man wie oben $f(1) = 0$ aus (2) hergeleitet hat) einerseits aus (1) mit $x_1 = a$, $x_2 = 1$ und aus (2) mit $x_1 = x_2 = a$

$$\begin{aligned} f(2 + \sqrt{5}) = f(a^3) = f(a^3) + f(1) &= f(a + 1) \\ &= f(a^2) = 2a \cdot f(a). \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (2) mit $x_1 = a^2$, $x_2 = a$

$$f(a^3) = a^2 \cdot f(a) + a \cdot f(a^2) = 3a^2 \cdot f(a).$$

Wegen $2a \neq 3a^2$ folgt dann durch Subtraktion $f(a) = 0$ und damit $f(2 + \sqrt{5}) = 0$.

271043A) Lösung:

7 Punkte

Zeichnungen: Abb. L 271043A a,b

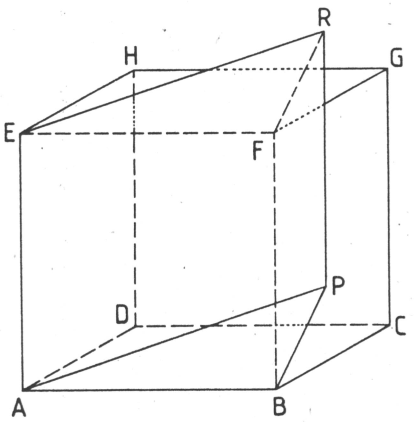

Abb. L 271043A a

zehneckiger Körper

Eckpunkte:

A,B,C,D,E,F,G,H,P,R.

Kanten:

AB, BC, CD, DA,
EF, FG, GH, HE,
BP, PA, FR, RE,
AE, BF, CG, DH, PR.

ebene Teilflächen:

ABCD, EFGH,
ABP, EFR,
BCGF, CDHG, DAEH,
APRE, PBFR.

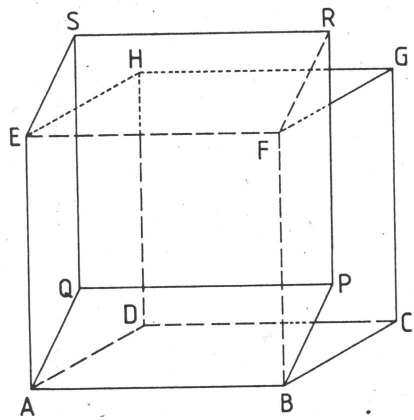

Abb. L 271043A b

zwölfeckiger Körper

Eckpunkte:

A,B,C,D,E,F,G,H,P,Q,R,S.

Kanten:

AB, BC, CD, DA,
EF, FG, GH, HE,
BP, PQ, QA, FR, RS, SE,
AE, BF, CG, DH, PR, QS.

ebene Teilflächen:

ABCD, EFGH,
ABPQ, EFRS,
BCGF, CDHG, DAEH,
AQSE, QPRS, PBFR.

Für beide Körper:
Gerade in Projektionsrichtung
z. B.:
Die Gerade durch P und B.

Bemerkung: Zu beiden Teilaufgaben gibt es noch zahlreiche andere Lösungen.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Die anzugebende Projektionsrichtung muß (nicht nur bezüglich der Punkte, sondern auch) bezüglich der Kanten genau zu Abb. L 271043A führen. Beispielsweise wäre für Abb. L 271043A a die Projektionsrichtung RG falsch. Bei ihr würde zwar auch ein achtpunktiges Bild entstehen, aber es enthielte z. B. die zusätzliche Strecke EG.

<u>271043B)Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Die zu diskutierende Ungleichung

$$\left|\frac{a^2 + 2b^2}{2ab} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$$

gilt wegen $a,b > 0$ genau dann, wenn

$$\left|a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2}\right| < \left|2a^2 - 2ab\sqrt{2}\right|$$

gilt, und dies ist äquivalent mit

$$\left|a - b\sqrt{2}\right|^2 < 2a \cdot \left|a - b\sqrt{2}\right|. \qquad (3)$$

Da für ganze a,b wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ stets $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$, also $|a - b\sqrt{2}| > 0$ gilt, ist (3) äquivalent mit

$$|a - b\sqrt{2}| < 2a$$

und dies der Reihe nach mit

$$-2a < a - b\sqrt{2} < 2a,$$

$$-a < b\sqrt{2} < 3a. \qquad (4)$$

Für $b > 0$ ist (4) äquivelant mit $b\sqrt{2} < 3a$. Also führen (1), (2) genau für alle $\frac{a}{b} > \frac{1}{3}\sqrt{2}$

auf einen besseren Näherungswert.

umlauft

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

271044) Lösung: **7 Punkte**

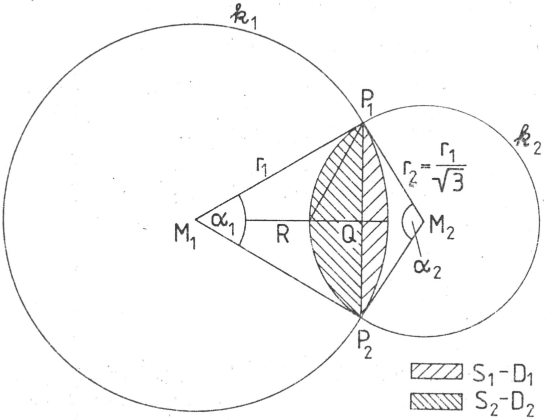

Abb. L 271044 (verkleinerter Maßstab)

Die Mittelpunkte von k_1, k_2 seien M_1 bzw. M_2. Die Gerade durch M_1, M_2 schneide P_1P_2 in Q. Das Dreieck $P_1P_2M_1$ ist gleichseitig mit $\overline{P_1P_2} = \overline{M_1P_1} = \overline{M_1P_2} = r_1 = 10$ cm; daher gilt $\overline{\sphericalangle P_1M_1P_2} = \overline{\sphericalangle P_2P_1M_1} = \overline{\sphericalangle P_1P_2M_1} = 60^\circ$. Da die Verbindungsgerade der Kreismittelpunkte die Schnittsehne halbiert und auf ihr senkrecht steht, ist

$\overline{QP_1} = \frac{1}{2} r_1$ und $\overline{\sphericalangle M_2QP_1} = 90^\circ$; hieraus und aus $\overline{M_2P_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} r_1$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{M_2Q} = r_1 \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{12}} r_1 = \frac{1}{2} r_2 .$$

Verlängert man M_2Q über Q hinaus um seine eigene Länge bis R, so liegt folglich R auf k_2; außerdem aber ist P_1Q im Dreieck M_2RP_1 sowohl Höhe als auch Seitenhalbierende. Dieses Dreieck ist daher auch mit $\overline{M_2P_1} = \overline{RP_1}$ gleichschenklig, also sogar gleichseitig. Da Q (als Punkt der Schnittsehne) innerhalb k_1 liegt, M_2 aber nach Voraussetzung außerhalb k_1, folgt wegen $r_2 < r_1$, daß R innerhalb k_1 liegt. Daraus und aus der Symmetrie bezüglich M_1M_2 ergibt sich: Es gilt

$$A = (S_1 - D_1) + (S_2 - D_2)$$

mit folgenden Bezeichnungen:

S_1: Flächeninhalt des Kreissektors $\widehat{P_1P_2}M_1$ von k_1 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_1 = \overline{\sphericalangle P_1M_1P_2} = 60^\circ$,

S_2: Flächeninhalt des Kreissektors $\widehat{P_1P_2}M_2$ von k_2 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_2 = \overline{\sphericalangle P_1M_2P_2} = 2 \cdot \overline{\sphericalangle P_1M_2R} = 120^\circ$,

D_1: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_1$,

D_2: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_2$, wegen $\Delta M_2QP_2 \cong \Delta M_2QP_1 \cong \Delta RQP_1$ auch Flächeninhalt des Dreiecks M_2RP_1.

Hiernach und wegen $r_2^2 = \frac{1}{3} r_1^2$ erhält man nach den Flächeninhaltsformeln für Kreissektoren und gleichseitige Dreiecke

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi r_1^2,\ D_1 = \frac{1}{4}r_1^2\sqrt{3},\ S_2 = \frac{1}{3}\pi\ r_2^2,\ D_2 = \frac{1}{4}r_2^2\sqrt{3},$$

$$A \doteq \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{\pi}{9} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right)r_1^2$$

$$= \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \cdot 100\ \text{cm}^2.$$

Hinweise zu <u>anderen Lösungsmöglichkeiten</u> und zur <u>Korrektur:</u>
Für das Ergebnis können auch mehrere andere Formelschreibweisen akzeptiert werden, z. B. $A = \left(\frac{250}{9}\pi - \frac{100}{3}\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$.

An einigen Stellen kann statt mit den obigen Begründungen auch mit Sätzen über das Drachenviereck $M_1P_1M_2P_2$, die gleichschenkligen Dreiecke $P_1P_2M_1$, $P_1P_2M_2$ oder die Symmetrie bezüglich M_1M_2 argumentiert werden.

Bei der Herleitung zu Lageaussagen und zur Flächenzusammensetzung kann anstelle verbaler Begründung ein stärkerer Bezug auf die Abbildung akzeptiert werden.

Bei manchen Herleitungsvarianten wird aber auch die Beachtung weiterer Lageaussagen nötig. Argumentiert man z. B. damit, daß man $S_1 + S_2$ als "Vierecksflächeninhalt $D_1 + D_2$ mit nochmals hinzugefügtem Teilinhalt A" deutet (und damit zu $A = (S_1 + S_2) - (D_1 + D_2)$ gelangt), so wird verwendet, daß das gemeinsame Flächenstück der beiden Kreise eine Teilfläche des Vierecks $M_1P_1M_2P_2$ ist.

271045) Lösung: **7 Punkte**

Man kann zunächst zeigen: Wenn in einem Wort w die Anzahl a der Buchstaben S nicht durch 3 teilbar ist, dann gilt dies auch für jedes Wort, das nach den Regeln (1) bis (4) aus w gebildet wird:
Für die Regeln (1) und (4) gilt es, weil sich a nicht ändert.
Für die Regel (3) gilt es, weil a entweder unverändert bleibt oder um 3 verkleinert wird.
Für die Regel (2) gilt es, weil sich a verdoppelt, wobei aus einer Zahl der Form $a = 3n+1$ oder $a = 3n+2$ (n ganzzahlig) eine Zahl der Form $2a = 3 \cdot 2n + 2$ bzw. $2a = 3 \cdot (2n+1) + 1$ entsteht.
Damit folgt: Durch (beliebig oft ausgeführte) Anwendung der Regeln (1) bis (4) kann aus dem Wort ES (mit $a = 1$) niemals das Wort ER (mit $a = 0$) erhalten werden.

271046) Lösung: **6 Punkte**

1. Es gilt stets
$$(a_i - b_i)^2 \geqq 0,$$
also
$$2a_ib_i \leqq a_i^2 + b_i^2 \quad (i = 1,2,3,4,5).$$
Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die linke der behaupteten Ungleichungen.

2. Da nach Voraussetzung
$$a_i \leqq 10 \leqq 2b_i, \text{ also } 2b_i - a_i \geqq 0,$$
und
$$b_i \leqq 10 \leqq 2a_i, \text{ also } 2a_i - b_i \geqq 0$$
gilt, folgt ferner
$$(2b_i - a_i)(2a_i - b_i) \geqq 0,$$
$$5a_ib_i - 2b_i^2 - 2a_i^2 \geqq 0,$$
$$a_i^2 + b_i^2 \leqq \frac{5}{2} a_ib_i \quad (i = 1,2,3,4,5).$$
Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die rechte der behaupteten Ungleichungen.