XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

271031

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x;y)$, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) x und y sind dreistellige natürliche Zahlen.

(2) Die drei Ziffern von x sind sämtlich voneinander verschieden.

(3) Die drei Ziffern von x sind auch die drei Ziffern von y, nur in anderer Reihenfolge.

(4) Es gilt $x-y = 45$.

271032

Es sei a eine gegebene positive reelle Zahl. Von einer Funktion f, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, werde vorausgesetzt, daß sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

(1) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) + f(x+a) = 1$.

(2) Es gibt eine reelle Zahl c, so daß für alle reellen Zahlen x, die $c < x \leqq c+a$ erfüllen, $f(x) > \frac{1}{2}$ gilt.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Funktion f ist periodisch; es gibt eine kleinstmögliche Periode von f. Ermitteln Sie diese kleinstmögliche Periode von f!

Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl p gibt, so daß für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x+p) = f(x)$ gilt. Ist das der Fall, so heißt jede positive reelle Zahl p, mit der dies gilt, eine Periode von f.

A 10;I

271033

Vier Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten M_1 bis M_4 und den Radien r_1 bis r_4 mögen so in einer Ebene E_1 liegen, daß sich k_1, k_2 und k_3 paarweise von außen berühren. Außerdem berührt k_4 die Kreise k_2 und k_3 ebenfalls von außen und hat mit k_1 keinen Punkt gemeinsam.

Die Kreise seien die Grundflächen von vier geraden Kreiskegeln mit den Höhen h_1 bis h_4 und den Spitzen S_1 bis S_4. Die Punkte S_1, S_2 und S_3 mögen auf der gleichen Seite von E_1 (d. h. im gleichen Halbraum bezüglich E_1) liegen.

Folgende Maße seien gegeben:

$r_1 = r_4 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm, $h_1 = 1$ cm, $h_2 = 2{,}1$ cm, $h_3 = 4{,}6$ cm.

Nun sollen S_1, S_2, S_3 und S_4 in einer Ebene E_2 liegen. Wie groß muß dann h_4 sein?

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

271034

Ermitteln Sie alle diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die

$$x^{2x} = \frac{1}{2}$$

gilt!

271035

Es sei ABC ein Dreieck, der Mittelpunkt von AB sei S, der Mittelpunkt von CS sei M, der Schnittpunkt von BC mit der Geraden durch A und M sei P.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $\overline{BP}:\overline{PC}$ und $\overline{AM}:\overline{MP}$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.

271036

Eine Ebene E sei durch vertikale und horizontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt (Abb. A 271036a). Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm, 2 cm (Abb. A 271036b) so ausgefüllt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

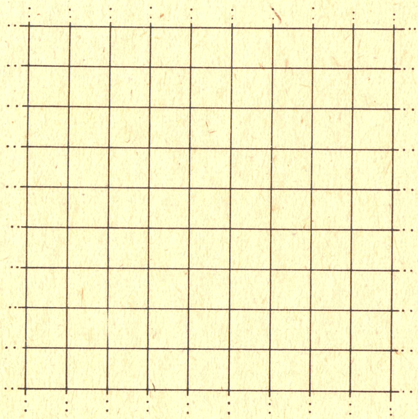

Abb. A 271036a

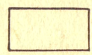

Abb. A 271036b

Kein Punkt der Ebene soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen.

A 10;II

Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke in kleinere Flächenstücke.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

L 10;I

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

271031) Lösung: 7 Punkte

Die Bedingungen (1) bis (4) sind genau dann erfüllt, wenn als Ziffern von x drei natürliche Zahlen a, b, c auftreten, für die folgendes gilt:

Es ist

$$1 \leq a \leq 9,\ 0 \leq b \leq 9,\ 0 \leq c \leq 9,\ a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c, \qquad (5)$$

und die Bedingung (4) wird erfüllt durch die Zahl

$$x = 100a + 10b + c$$

und diejenige Zahl y, für die genau einer der folgenden Fälle I bis V vorliegt:

Fall I: Es gilt $y = 100a + 10c + b$.

Fall II: Es gilt $y = 100b + 10a + c$ und außer (5) auch

$$b \neq 0. \qquad (6)$$

Fall III: Es gilt $y = 100b + 10c + a$ und außer (5) auch (6).

Fall IV: Es gilt $y = 100c + 10a + b$ und außer (5) auch

$$c \neq 0. \qquad (7)$$

Fall V: Es gilt $y = 100c + 10b + a$ und außer (5) auch (7).

Im Fall I ist (4) wegen $x-y = 9(b-c)$ äquivalent mit $b-c = 5$, was unter den Bedingungen (5) genau durch

$$(b;c) = (5;0),\ (6;1),\ (7;2),\ (8;3),\ (9;4)$$

erfüllt wird, jeweils zusammen mit denjenigen der Zahlen $a = 1, \ldots, 9$, die auch $a \neq b$ und $a \neq c$ erfüllen. Für jede der 9 Zahlen $a = 1, \ldots, 9$ verbleiben damit genau 4 Paare (b;c). Also werden (1) bis (4) im Fall I durch genau 36 Paare (x;y) erfüllt.

Im Fall II ist (4) wegen $x-y = 90(a-b)$ nicht erfüllbar, da 45 kein Vielfaches von 90 ist.

Im Fall III ist (4) wegen $x-y = 9(11a - 10b - c)$ äquivalent mit $11a - 10b - c = 5$ und dies mit

$$11a - 5 = 10b + c.$$

Wegen (5), (6) scheiden hierfür die Werte $a \geqq 5$ aus; denn für diese Werte würde sich bei Berechnung von $11a - 5$ eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer a und damit der Widerspruch $a = b$ ergeben. Ferner scheidet $a = 1$ aus; denn hierfür würde $11a - 5$ eine einstellige Zahl. Die verbleibenden Werte

$a = 2, 3, 4$

erfüllen wegen $11a - 5 = 17, 28, 39$ jeweils zusammen genau mit

$(b;c) = (1;7), (2;8), (3;9)$

alle Bedingungen (5), (6). Also werden (1) bis (4) im Fall III durch genau 3 Paare $(x;y)$ erfüllt.

Im Fall IV ist (4) wegen $x-y = 9(10a + b - 11c)$ äquivalent mit $10a + b - 11c = 5$ und dies mit

$$11c + 5 = 10a + b.$$

Wegen (5), (7) scheiden hierfür die Werte $c \leqq 4$ und der Wert $c = 9$ aus; denn $c = 0$ erfüllt nicht (7), und für $1 \leqq c \leqq 4$ bzw. $c = 9$ würde sich $11c + 5$ als zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer $a = c$ bzw. als dreistellige Zahl ergeben. Die verbleibenden Werte

$c = 5, 6, 7, 8$

erfüllen wegen $11c + 5 = 60, 71, 82, 93$ jeweils zusammen genau mit

$(a;b) = (6;0), (7;1), (8;2), (9;3)$

alle Bedingungen (5), (7). Also werden (1) bis (4) im Fall IV durch genau 4 Paare $(x;y)$ erfüllt.

Im Fall V ist (4) wegen $x-y = 99(a-c)$ nicht erfüllbar, da 45 kein Vielfaches von 99 ist.

Als gesuchte Anzahl aller Paare $(x;y)$, die (1) bis (4) erfüllen, ergibt sich somit $36 + 3 + 4 = 43$.

Bemerkung zur Korrektur:

1. Die Aufgabe ist grundsätzlich auch dadurch lösbar, daß (zur Erfüllung von (1), (4) für jede der 855 Zahlen $n = 100, 101, \ldots, 954$ jeweils die Zahl $n+45$ angegeben wird, wonach die Bedingungen (2), (3) durch unmittelbaren Ziffernvergleich überprüfbar sind.
2. Als Variante dieser (logisch korrekten, aber wenig realistischen) Möglichkeit könnte schon eher realisierbar sein, diese Summenbildungen mit einem Taschenrechner auszuführen, ohne die 1710 Zahlen aufzuschreiben. Ein solches Vorgehen kann erst dann bei der Korrektur als gültige Lösung gewertet werden, wenn sowohl die Arbeitsweise beim Bilden der Zahlen als auch die zur Überprüfung verwendeten Vergleichkriterien korrekt beschrieben sind.

3. Ferner wäre grundsätzlich ein mit programmierbarem Taschenrechner durchgeführtes Probierverfahren dieser Art als Lösungsmöglichkeit zu werten, falls das eingegebene Programm angegeben wird und falls dann bewiesen wird, daß es die gesuchte Anzahl erbringen muß. - Diesem Vorgehen wird jedoch im Reglement die Festlegung entgegengehalten, Taschenrechner zur Bezirksolympiade nur in gleichem Umfang wie im Schulunterricht der betreffenden Klassenstufe zu nutzen.
Programmierbare Taschenrechner sind daher <u>nicht</u> zugelassen.

<u>271032) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Für jede Funktion f, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, und für jede reelle Zahl x gilt nach (1)

$$f(x+a) = 1 - f(x),$$

also

$$f(x+2a) = 1 - f(x+a) = 1 - (1 - f(x)) = f(x),$$

somit hat f die Zahl 2a als eine Periode.

Für jede positive Zahl $p < 2a$ gilt dagegen: Wegen

$$0 < \frac{p}{2} < a \qquad (3)$$

ist einerseits $c < c + \frac{p}{2} < c + a$, nach (2) also $f(c + \frac{p}{2}) > \frac{1}{2}$ und folglich

$$f(a + c + \frac{p}{2}) = 1 - f(c + \frac{p}{2}) < \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Andererseits ist wegen (3) auch $c < a + c - \frac{p}{2} < a + c$, nach (2) also

$$f(a + c - \frac{p}{2}) > \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt, daß für die reelle Zahl $x = a + c - \frac{p}{2}$ die Ungleichung $f(x) > f(x+p)$ gilt. Also ist p keine Periode von f.
Damit ist bewiesen, daß jede Funktion f, die (1) und (2) erfüllt, die kleinstmögliche Periode 2a hat.

<u>Bemerkung:</u> Die Beweisführung zu $p < 2a$ kann auch in mehr anschaulicher Form durch Skizzierung der Bereiche $c < x \leq c+a$, $y > \frac{1}{2}$ und $c+a < x \leq c+2a$, $y < \frac{1}{2}$ angegeben werden, in denen der Graph von f verlaufen muß: Man legt eine Strecke der Länge p so auf die x-Achse, daß ihr linker bzw. rechter Endpunkt zu den x-Werten des ersten bzw. zweiten Bereichs gehört. (Dies ist wegen $p < 2a$ stets möglich, z. B. indem man den Mittelpunkt der Strecke auf die Stelle $x = c+a$ legt.) Diese beiden x-Werte haben dann voneinander verschiedene Funktionswerte.

<u>271033) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Für die Mittelpunkte der Kreise gilt nach Voraussetzung

$\overline{M_1M_2} = \overline{M_4M_2} = 3$ cm, (1)

$\overline{M_1M_3} = \overline{M_4M_3} = 4$ cm, (2)

$\overline{M_2M_3} = 5$ cm (3)

(siehe Abb. L 271033a).

Der Schnittpunkt der Diagonalen M_1M_4, M_2M_3 des Vierecks $M_1M_2M_4M_3$ sei P. Wegen (1), (2) ist $M_1M_2M_4M_3$ ein Drachenviereck; daher gilt

$\overline{M_1P} = \overline{PM_4}$ (4)

und $\sphericalangle M_1PM_2 = 90^\circ$. (5)

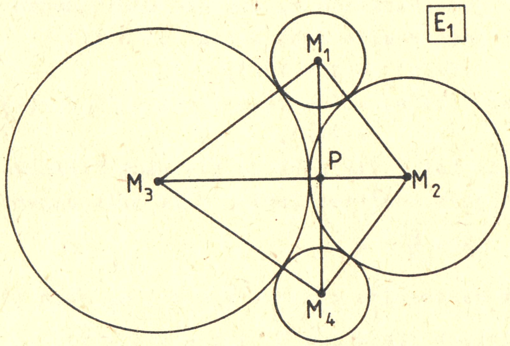

Abb. L 271033a

Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ folgt weiterhin nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras aus (1), (2), (3)

$\sphericalangle M_2M_1M_3 = 90^\circ$. (6)

Aus (5), (6) und $\sphericalangle M_1M_2P = \sphericalangle M_3M_2M_1$ folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$\triangle M_2PM_1 \sim \triangle M_2M_1M_3$,

also $\overline{M_2P} : \overline{M_2M_1} = \overline{M_2M_1} : \overline{M_2M_3}$,

$\overline{M_2P} = \frac{9}{5}$ cm. (7)

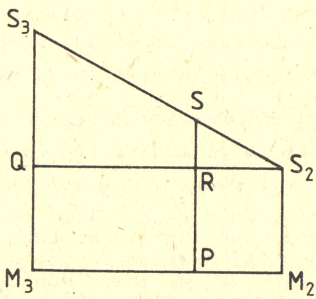

Abb. L 271033b

Da die Strecken M_2S_2 und M_3S_3 auf E_1 senkrecht, also zueinander parallel sind, liegen die Punkte M_2, M_3, S_2, S_3 in einer gemeinsamen Ebene und bilden ein Trapez $M_2M_3S_3S_2$, in dem die Seitenlängen $\overline{M_2S_2} = h_2$, $\overline{M_3S_3} = h_3$ und (3) auftreten (Abb. L 271033b). Die Parallele durch S_2 zu M_2M_3 schneidet M_3S_3 in einem Punkt Q, und da hiermit $M_2M_3QS_2$ ein Parallelogramm wird, ergibt sich

$$\overline{QS_3} = h_3 - h_2 = 2{,}5 \text{ cm}. \qquad (8)$$

Errichtet man die Senkrechte in P auf der Ebene E_1, so ist sie parallel zu M_2S_2 und M_3S_3, schneidet also S_2Q und S_2S_3 in Punkten R bzw. S. Damit wird auch M_2PRS_2 ein Parallogramm; ferner ergibt sich nach dem Strahlensatz und (3), (7), (8)

$$\overline{RS} : \overline{QS_3} = \overline{S_2R} : \overline{S_2Q} = \overline{M_2P} : \overline{M_2M_3},$$

$$\overline{RS} = 2{,}5 \cdot \frac{9}{5} : 5 \text{ cm} = 0{,}9 \text{ cm},$$

$$\overline{PS} = h_2 + \overline{RS} = 3 \text{ cm}. \qquad (9)$$

Da M_1S_1 und M_4S_4 ebenfalls auf E_1 senkrecht stehen, liegen M_1, M_4, S_1, S_4 in einer gemeinsamen Ebene E_3; in dieser liegt auch die Strecke PS. Daher ist wieder $M_1M_4S_4S_1$ ein Trapez, und die Strecke PS ist parallel zu M_1S_1 und M_4S_4. Ihr Endpunkt S liegt nach seiner Definition auf S_2S_3, also in E_2 und damit auf der Schnittgeraden g von E_3 mit E_2. Auch S_1 und S_4 gehören sowohl zu E_2 als auch zu E_3; also ist g die Gerade durch S_1, S_4; folglich liegt S auf S_1S_4 (Abb. L 271033c).

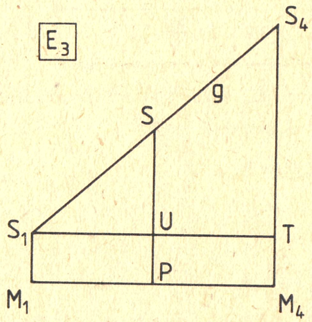

Abb. L 271033c

Die Parallele durch S_1 zu M_1M_4 schneidet M_4S_4 und PS in Punkten T bzw. U, und da hiermit $M_1M_4TS_1$ und M_1PUS_1 Parallelogramme werden, ergibt sich wegen (9)

$$\overline{US} = \overline{PS} - h_1 = 2 \text{ cm}. \qquad (10)$$

Aus dem Strahlensatz und (4), (10) erhält man damit

$$\overline{TS_4} : \overline{US} = \overline{S_1T} : \overline{S_1U} = \overline{M_1M_4} : \overline{M_1P} = 2 : 1,$$

$$\overline{TS_4} = 2 \cdot \overline{US} = 4 \text{ cm},$$

also die gesuchte Höhe

$$h_4 = h_1 + \overline{TS_4} = 5 \text{ cm}.$$

Andere Lösungsmöglichkeiten ergeben sich z. B. nach Herleitung von (7) durch Einführung eines Koordinatensystems, etwa so, daß folgende Koordinaten vorliegen:

Punkt	Koordinaten
P	(0, 0, 0)
M_1	$(0, \frac{12}{5}, 0)$
M_2	$(\frac{9}{5}, 0, 0)$
M_3	$(-\frac{16}{5}, 0, 0)$
M_4	$(0, -\frac{12}{5}, 0)$

Punkt	Koordinaten
S_1	$(0, \frac{12}{5}, 1)$
S_2	$(\frac{9}{5}, 0, \frac{21}{10})$
S_3	$(-\frac{16}{5}, 0, \frac{23}{5})$
S_4	$(0, -\frac{12}{5}, h_4)$

Die Ebene E_2 hat eine Gleichung $z = ax + by + c$. Da S_1, S_2, S_3 auf ihr liegen, gilt

$$1 = \frac{12}{5} b + c, \tag{11}$$

$$\frac{21}{10} = \frac{9}{5} a + c, \tag{12}$$

$$\frac{23}{5} = \frac{16}{5} a + c. \tag{13}$$

Aus (12), (13) folgt durch Multiplikation mit 16 bzw. 9

$$\frac{168}{5} = \frac{9 \cdot 16}{5} a + 16 c,$$

$$\frac{207}{5} = \frac{9 \cdot 16}{5} a + 9 c$$

und daraus durch Addition

$$75 = 25 c,$$

also $c = 3$.

Aus (11) folgt dann $b = -\frac{5}{6}$.

Da auch S_4 auf E_2 liegen soll, ergibt sich somit

$$h_4 = b \cdot (-\frac{12}{5}) + c = 5.$$

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

271034) Lösung: **7 Punkte**

Jede positive rationale Zahl x hat eine Darstellung

$$x = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

mit natürlichen Zahlen $p,q > 0$, die zueinander teilerfremd sind. Hierfür ist die geforderte Gleichung der Reihe nach äquivalent mit

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2p}{q}} = \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{q},$$

$$2^q \cdot p^{2p} = q^{2p}. \qquad (2)$$

Wegen der Teilerfremdheit von p,q folgt aus (2), daß in der Primfaktorzerlegung von q nur der Primfaktor 2 auftreten kann und in der von p überhaupt kein Primfaktor; d. h., es muß

$$q = 2^m \qquad (3)$$

mit einer natürlichen Zahl m und

$$p = 1 \qquad (4)$$

gelten. Für diese p,q ist (2) äquivalent mit

$$2^{2^m} = 2^{2m}$$

und dies mit

$$2^m = 2m. \qquad (5)$$

Unter den natürlichen Zahlen m = 0, 1, 2 gilt (5) genau für m = 1 und m = 2. Vergrößert man m für $m \geqq 2$ jeweils um 1, so wird die rechte Seite von (5) um 2 vergrößert, die linke Seite aber verdoppelt, d. h. um 2^m und damit um mindestens 4 vergrößert. Für alle m = 3, 4, 5, ... ist somit (5) nicht erfüllt. Demnach ist (5) äquivalent damit, daß

m = 1 oder m = 2

gilt. Folglich sind nach (1), (3), (4) diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die die geforderte Gleichung gilt, genau die Zahlen

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{4}. \qquad (6)$$

Hinweis: Wird der Lösungsverlauf nur als Schluß auf (6) (und nicht wie hier als Äquivalenz) dargestellt, so ist anschließend eine Probe erforderlich, etwa als Bestätigung

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}\,,\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \cdot \frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung: Auch bei Zulassung irrationaler x bleiben die Zahlen (6) die einzigen Lösungen. Ein Beweis hierfür, etwa durch Herleitung streng monotonen Fallens bzw. Steigens von x^{2x} in $(0;\frac{1}{e}]$ bzw. $[\frac{1}{e};+\infty)$, ist vom Schüler nicht zu fordern.

271035) Lösung: 6 Punkte

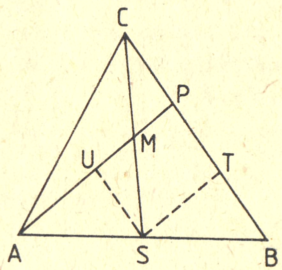

Abb. L 271035

Die Parallele durch S zu AP bzw. zu BC schneide BC bzw. AP in T bzw. U (siehe Abb. L 271035).

Nach dem Strahlensatz ist dann

$\overline{BT}:\overline{TP} = \overline{BS}:\overline{SA} = 1:1$, also $\overline{BT} = \overline{TP}$,

$\overline{TP}:\overline{PC} = \overline{SM}:\overline{MC} = 1:1$, also $\overline{TP} = \overline{PC}$.

Daher gilt $\overline{BT} = \overline{TP} = \overline{PC}$, also

$\overline{BP}:\overline{PC} = 2:1$.

Ferner ist nach dem Strahlensatz

$\overline{AU}:\overline{UP} = \overline{AS}:\overline{SB} = 1:1$, also $\overline{AU} = \overline{UP}$,

$\overline{MU}:\overline{MP} = \overline{MS}:\overline{MC} = 1:1$, also $\overline{MU} = \overline{MP}$.

Daher gilt $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{UP} = \frac{1}{4}\overline{AP}$, also

$\overline{AM}:\overline{MP} = 3:1$.

Es gibt mehrere andere Lösungsmöglichkeiten.

Eine Lösung unter Verwendung von Flächeninhalten ist z. B.:

Wegen $\overline{CM} = \overline{MS}$ und $\overline{AS} = \overline{SB}$ sind die Dreiecke CMA, MSA, MSB, CMB einander flächeninhaltsgleich; ihre Flächeninhalte sind also $\frac{1}{4}$ des Flächeninhaltes von Dreieck ABC. Das Lot von M auf BC beträgt daher $\frac{1}{4}$ des Lotes von A auf BC. Daraus folgt $\overline{MP} = \frac{1}{4}\overline{AP}$, d. h. $\overline{AM}:\overline{MP} = 3:1$.

Der Flächeninhalt von Dreieck CMP beträgt somit $\frac{1}{3}$ des Flächeninhaltes von Dreieck CMA, also auch von Dreieck CMB. Daraus folgt $\overline{PC} = \frac{1}{3}\overline{BC}$, d. h. $\overline{BP}:\overline{PC} = 2:1$.

Eine Lösung mittels "baryzentrischer Koordinaten" ist:

Belegen wir die Eckpunkte A und B jeweils mit der Masse 1 und den Eckpunkt C mit der Masse 2, dann läßt sich A, B durch S mit der Masse 2 ersetzen. Nun ist M der Schwerpunkt des Gesamtsystems. Dieser muß sich auch bei anderem Vorgehen ergeben. Ersetzen wir B, C durch einen Punkt R, belegt mit der Masse 3, so teilt dieser die Strecke BC im umgekehrten Verhältnis der Massen, also $\overline{CR}:\overline{RB} = 1:2$. Nun muß M der Schwerpunkt des Systems A, R sein, d. h., R liegt auf der Geraden durch A und M, ist also P, und M teilt AP im umgekehrten Verhältnis der bei A und P liegenden Massen, also $\overline{AM}:\overline{MP} = 3:1$.

271036) Lösung: 7 Punkte

Ein derartiges Ausfüllen der Ebene E ist möglich, wie sich z. B. folgendermaßen nachweisen läßt:

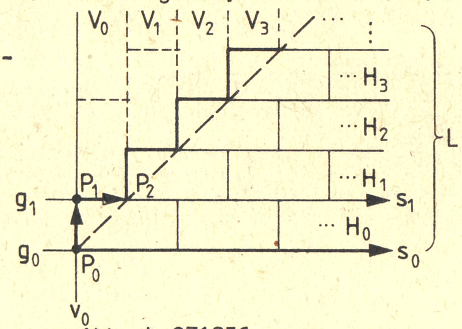

Abb. L 271036

Auf einer der horizontalen Geraden g_0 betrachte man ihren Schnittpunkt P_0 mit einer der vertikalen Geraden v_0 und einen Strahl s_0, der auf g_0 von P_0 ausgeht (Abb. L 271036).

Eine zu g_0 benachbarte horizontale Gerade g_1 schneide v_0 in P_1; der von P_1 ausgehende zu s_0 gleichsinnig parallele Strahl sei s_1. Die Strahlen s_0, s_1 und die Strecke P_0P_1 begrenzen einen Halbstreifen H_0, der mit Rechtecken der genannten Art ausgefüllt werde.

Er werde ferner längs des Verschiebungspfeils $\overrightarrow{P_0P_1}$ und dann längs eines Verschiebungspfeils $\overrightarrow{P_1P_2}$, der um 1 cm in Richtung von s_1 verläuft, verschoben; dabei entsteht ein ebenfalls ausgefüllter Halbstreifen H_1. Aus H_1 bilde man entsprechend H_2, aus H_2 ebenso H_3 ... usw.

Es entsteht eine treppenförmige Lagerung L von Rechtecken. Verschiebt man sie längs $\overrightarrow{P_1P_2}$ und spiegelt dann an der Geraden durch P_0, P_2, so erhält man eine Lagerung, die sich aus ausgefüllten vertikalen Halbstreifen V_0, V_1, V_2, ... zusammensetzt und zusammen mit der Lagerung L einen Quadranten der Ebene E ausfüllt. Durch Spiegelung an g_0 und v_0 erhält man schließlich eine Ausfüllung der gesamten Ebene E. Für sie gilt: 1. Jede der gegebenen horizontalen Geraden hat mit jedem Halbstreifen H_1 der Lagerung L höchstens Randpunkte gemeinsam, zerlegt also keines der Rechtecke, die H_i ausfüllen, in kleinere Flächenstücke. 2. Jede der gegebenen vertikalen Geraden hat wegen des treppenförmigen Aufbaus der Lagerung L höchstens mit endlich vielen der Halbstreifen H_i gemeinsame Punkte und kann daher auch höchstens endlich viele der Rechtecke, die L ausfüllen, in kleinere Flächenstücke zerlegen. Entsprechende Aussagen gelten für die durch (Verschiebung und) Spiegelung aus L entstehenden Lagerungen; dabei ist für diejenigen Lagerungen, die aus vertikalen Halbstreifen bestehen, überall "horizontal" und "vertikal" zu vertauschen. Daraus folgt insgesamt, wie gefordert, daß jede der gegebenen vertikalen und horizontalen Geraden nur endlich viele der zur Ausfüllung von E verwendeten Rechtecke in kleinere Flächenstücke zerlegt.

Hinweise zur Korrektur:

Zur Angabe einer Ausfüllung kann anstelle einer vorwiegend verbalen Beschreibung auch ein stärkeres Verweisen auf Abbildungen akzeptiert werden.

Zum Nachweis der geforderten Bedingungen ist erforderlich, daß aus der Darstellung, auch wenn sie sich stärker auf Abbildungen bezieht, hervorgeht, in welcher Weise die verlangte Endlichkeitseigenschaft durch den Aufbau der Ausfüllung bewirkt wird.