XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

271021

Das Rechteck in Abbildung A 271021a soll aus den Teilen der Abbildung A 271021b zusammengesetzt werden. Jedes Teil soll genau einmal verwendet werden; die Teile sind ohne Anwendung von Spiegelungen, nur durch Verschiebungen und Drehungen in die gewünschte Lage zu bringen.
Zeichnen Sie zwei verschiedene Zusammensetzungen des Rechtecks, die auf diese Weise entstehen können! Überprüfen Sie darin die Erfüllung der geforderten Bedingungen, indem Sie die (jeweils in die gewünschte Lage gebrachten) Teile durch ihre Nummern kennzeichnen!

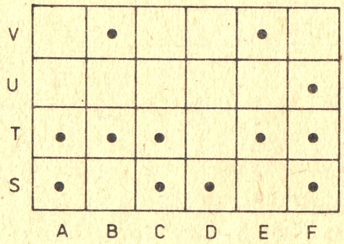

Abb. A 271021a

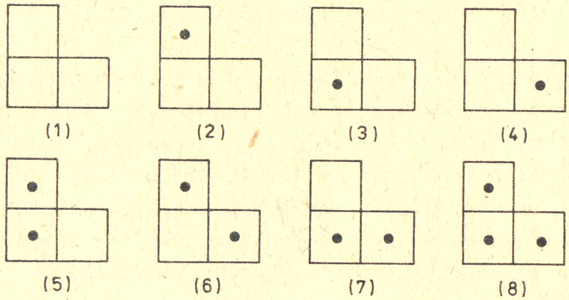

Abb. A 271021b

<u>271022</u>

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$\frac{n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 7n - 6}{n + 2}$$

eine natürliche Zahl ist!

<u>271023</u>

Es sei ABCD ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a, ferner sei x eine beliebig gewählte positive reelle Zahl. Die Quadratseiten seien wie in Abbildung A 271023 um Strecken der Länge $x \cdot a$ verlängert bis R, S, T bzw. U.

(a) Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets RSTU ein Quadrat ist!

(b) Ermitteln Sie alle diejenigen positiven reellen Zahlen x, bei deren Wahl der Flächeninhalt des Quadrates ABCD ein Fünftel des Flächeninhaltes des Quadrates RSTU beträgt!

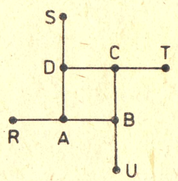

Abb. A 271023

A 10

271024

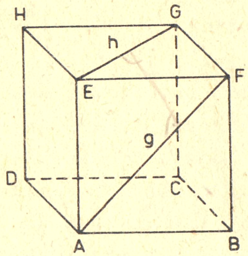

Abb. A 271024

Bei einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a seien die Eckpunkte wie in Abbildung A 271024 bezeichnet. Die Gerade durch A und F sei g, die Gerade durch E und G sei h.

Ermitteln Sie den Abstand von g und h!

Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g, h versteht man die Länge einer Strecke XY, die so gelegen ist, daß X auf g, Y auf h liegt und daß XY sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht.

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

271021) Lösung: 10 Punkte

Es gibt (sogar genau) die beiden Zerlegungen in Abbildung L 271021a und b (der Einzigkeitsnachweis wird nicht verlangt):

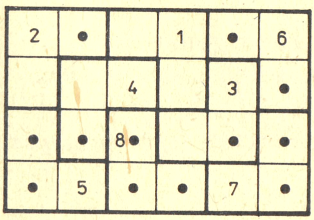

Abb. L 271021a

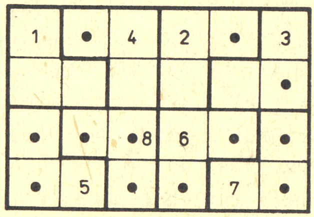

Abb. L 271021b

271022) Lösung: 10 Punkte

Für jede natürliche Zahl n ist (wie man z. B. durch Polynomdivision erhält)

$$(n^4-2n^3-3n^2+7n-6) : (n+2) = n^3-4n^2+5n-3 =$$
$$= n^2(n-4) + 5(n-1) + 2 \qquad (*)$$

eine ganze Zahl. Für alle $n \geqq 4$ ist diese Zahl, wie aus (*) ersichtlich ist, nicht negativ, also eine natürliche Zahl.
Für n = 0, 1, 2, 3 ergeben sich in (*) die Werte

-3, -1, -1, 3.

Also ist die zu untersuchende Zahl genau für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 3$ eine natürliche Zahl.

271023) Lösung: 10 Punkte

(a) Nach Voraussetzung ist

$$\overline{\sphericalangle UAR} = \overline{\sphericalangle RBS} = 90^\circ \qquad (1)$$

(Nebenwinkel zu Quadrat-Innenwinkeln),

$$\overline{AU} = \overline{BR} = x \cdot a, \qquad (2)$$

$$\overline{AR} = \overline{BS} = (1+x) \cdot a. \qquad (3)$$

Daraus folgt $\triangle UAR \cong \triangle RBS$ (sws), also

$$\overline{UR} = \overline{RS} \qquad (4)$$

und $\overline{\sphericalangle URA} = \overline{\sphericalangle RSB}$. (5)

Da nach dem Innenwinkelsatz aus (1) ferner

$$\overline{\sphericalangle RSB} + \overline{\sphericalangle BRS} = 90^\circ$$

folgt, ergibt sich wegen (5) auch

$$\overline{\sphericalangle URA} + \overline{\sphericalangle BRS} = 90^\circ,$$

d. h. $\overline{\sphericalangle URS} = 90^\circ$.

Entsprechend zu (4), (6) folgt, daß im Viereck RSTU alle vier Seiten gleiche Länge und alle vier Innenwinkel die Größe 90° haben. Daher ist RSTU ein Quadrat.

(b) Nach (1), (2), (3) hat das Dreieck RBS den Flächeninhalt $\frac{1}{2}xa(1+x)a = \frac{1}{2}(x+x^2)a^2$, ebenso die Dreiecke SCT, TDU und UAR. Somit hat RSTU den Flächeninhalt $a^2 + 2(x+x^2)a^2$.

Also erfüllt x genau dann die in (b) gestellte Forderung, wenn

$a^2 + 2(x+x^2)a^2 = 5a^2$

gilt. Dies ist äquivalent mit

$x^2 + x - 2 = 0,$

und diese Gleichung hat genau die Lösungen $x = 1$ und $x = -2$, von denen genau $x = 1$ auch die Forderung erfüllt, positiv zu sein.

<u>Andere Lösungsmöglichkeit</u> zu (b): Für $x = 1$ wird $\overline{UR}^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$, also Forderung (b) erfüllt. Bei kleinerer bzw. größerer Wahl von x verkleinern bzw. vergrößern sich auch $\overline{AU}$, $\overline{AR}$ und folglich $\overline{UR}^2$; also ist $x = 1$ der einzige Wert, der (b) erfüllt.

271024) Lösung: 10 Punkte

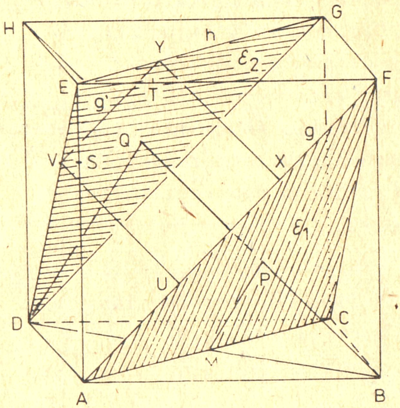

Abb. L 271024a

Die Ebenen ε_1 durch A, C, F und ε_2 durch D, E, G sind parallel zueinander; die Raumdiagonale BH, die sie in P bzw. Q schneide, steht auf diesen Ebenen senkrecht. (Zitat als bekannter Sachverhalt; auch vermittels anderer Sachverhalte, z. B.: $AC \parallel EG$, $AF \parallel DG$; Drehung um die Achse BH mit A, C, F $\rightarrow$ C, F, A; oder Beweis z. B.: Wegen $AC \perp AE \parallel BF$, $AC \perp BD$ ist $AC \perp BDHF$, also BH auch senkrecht auf Parallelen zu AC, ebenso auf Parallelen zu AF.) Alle von Punkten aus ε_1 auf ε_2 gefällten Lote haben somit die Länge $\overline{PQ}$. Zu diesen Loten gehört auch XY mit der im Aufgabentext beschriebenen Lage.

(Die Fußpunkte aller von Punkten aus g gefällten Lote bilden nämlich eine zu g parallele Gerade g' in ε_2; wegen $g' \parallel g \nparallel h$ schneidet sie h in einem Punkt Y, dieser ist Fußpunkt eines X auf g, und wegen $XY \perp \varepsilon_1$, $XY \perp \varepsilon_2$ gilt $XY \perp g$, $XY \perp h$.)

Also ist $\overline{PQ}$ gleich dem gesuchten Abstand $\overline{XY}$. Ist nun M der Schnittpunkt von AC mit BD, so gilt: Die Ebene durch B, F, H, D schneidet ε_1 bzw. ε_2 in der Geraden durch M, P bzw. der Geraden durch D, Q. Wegen $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ ist daher $MP \parallel DQ$, nach dem Strahlensatz und wegen $\overline{BM} = \overline{MD}$ also $\overline{BP} = \overline{PQ}$.

Ebenso folgt $\overline{HQ} = \overline{PQ}$. Also ist der gesuchte Abstand

$$\overline{XY} = \overline{PQ} = \frac{1}{3}\overline{BH} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.$$

Andere Lösungsmöglichkeiten:

(1) Man definiert X, Y, U, V (Abb. L 271024a) durch $\overline{AU} = \overline{XF} = \overline{EV} = \overline{EY} = \frac{a}{3}\sqrt{2}$, erhält (Strahlensatz und Umkehrung) $VY \parallel UX$ und $\overline{VY} = \overline{UX}$, also UXYV als Parallelogramm. Dann zeigt man $\overline{VX} = \overline{UY}$ (z. B. für $\overline{ES} = \overline{ET} = \frac{a}{3}\sqrt{2}$, wegen $\triangle VSX \cong \triangle YTU$), also UXYV als Rechteckt; $XY \perp g$ und ebenso (mit anderen Hilfspunkten statt U, V): $XY \perp h$.

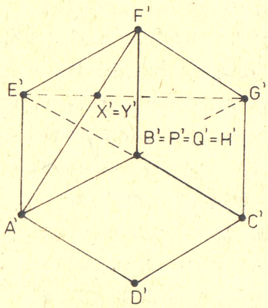

Abb. L 271024b

(2) Die Gewinnung von Aussagen wie $\overline{XF} = \frac{1}{3}\overline{AF}$, $\overline{EY} = \frac{1}{3}\overline{EG}$ kann auch unter Verwendung einer senkrechten Parallelprojektion auf eine zu ε_1 und ε_2 parallele Zeichenebene erfolgen. Man erhält die gleichseitigen Dreiecke A'C'F' und D'E'G' mit gemeinsamem Schwerpunkt B' = H', also wegen A'C' $\parallel$ E'G', A'F' $\parallel$ D'G' die (auch als bekannter Sachverhalt zu zitierende) Abbildung L 271024b des regelmäßigen Sechsecks.

(3) Die Beziehung $\overline{PQ} = \frac{1}{3}\overline{BH}$ kann auch erhalten werden, indem man P als Schwerpunkt von ACF nachweist, also $\overline{PH}$ als Höhenlänge des regelmäßigen Tetraeders ACFH mit der Seitenlänge $s = a\sqrt{2}$ zu $\overline{PH} = \frac{s}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$ errechnet. Damit verbleibt $\overline{BP} = \frac{1}{3}\overline{BH}$ und ebenso $\overline{HQ} = \frac{1}{3}\overline{BH}$.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

271021

Pro Zerlegung: 5 Punkte	10 Punkte

271022

Äquivalenz mit $n^3 - 4n^2 + 5n - 3$	4 Punkte
$n \geqq 4$ als hinreichende Bedingung	3 Punkte
als notwendige Bedingung	3 Punkte
	10 Punkte

271023

a) gleichlange Seiten	3 Punkte
gleichgroße Winkel	3 Punkte
b) x = 1 hinreichend	2 Punkte
notwendig	2 Punkte
	10 Punkte

271024

Geometrische Erfassung einer geeigneten Strecke XY	5 Punkte
Berechnung der Länge von XY	5 Punkte
	10 Punkte