A 9;I XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

270931

a) Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x_1^{11} + x_2^{11} + \dots + x_{1987}^{11} = 1988 \qquad (1)$$

keine Lösung $(x_1, x_2, \dots, x_{1987})$ besitzt, in der alle Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{1987}$ natürliche Zahlen sind!

b) Beweisen Sie, daß die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!

Dabei heißen zwei Lösungen $(x_1, x_2, \dots, x_{1987})$ und $(x_1', x_2', \dots, x_{1987}')$ genau dann voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen

$x_1 \neq x_1'$, $x_2 \neq x_2'$, ..., $x_{1987} \neq x_{1987}'$ gilt.

270932

I. Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a,b,c,d reelle Zahlen sind, für die $b \neq 0$, $b+c \neq 0$ und $b+d \neq 0$ gilt, so folgt

aus $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

stets auch $\frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$.

II. Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a,b,c,d positive reelle Zahlen sind, so folgt

aus $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

stets auch $\frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$.

A 9;I

270933

Es sei ABCD ein Sehnenviereck, dessen Seiten AB und CD so gelegen sind, daß sich die Verlängerung von AB über B hinaus und die Verlängerung von DC über C hinaus in einem Punkt T schneiden. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ATD$ sei h. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S; die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ASD$ sei g.

Beweisen Sie: Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, daß g und h zueinander parallel sind.

(Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, daß g und h in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.)

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

270934

Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Gerade liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke. Dabei kommt es auch vor, daß Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.

Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die

Anzahl A aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.

Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl A müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein.

Trifft das zu?

270935

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

270936

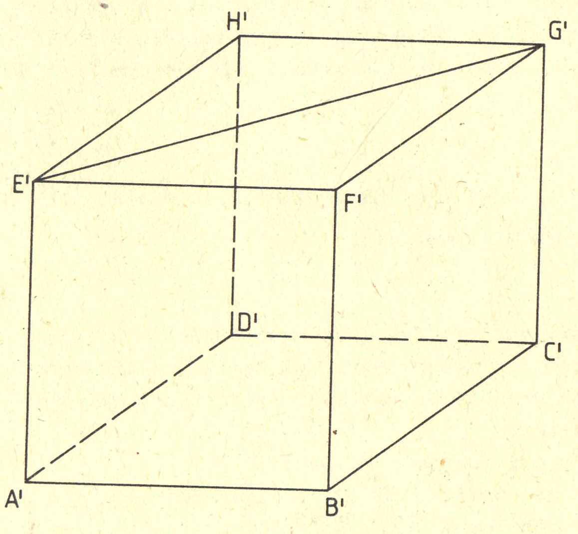
Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild A'B'C'D'E'F'G'H' eines Würfels ABCDEFGH bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, daß die Fläche ABFE ohne Verzerrung in wahrer Größe A'B'F'E' erscheint.

a) Beweisen Sie die folgende Aussage:
Es gibt auf der Strecke EG genau einen Punkt P_0 mit der Eigenschaft, daß die Summe $\overline{CP_0} + \overline{P_0F}$ kleiner ist als die Summe $\overline{CP} + \overline{PF}$ für jeden anderen Punkt P auf EG.

b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild P_0' dieses Punktes P_0 bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren! Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

(Hinweis: CP_0, P_0F, CP, PF bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.)

A 9;II



Arbeitsblatt zu 270936

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

270931) Lösung: 7 Punkte

a) Angenommen, für natürliche Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1987}$ wäre $(x_1, x_2, \ldots, x_{1987})$ eine Lösung von (1).
Wären dabei alle $x_i \leqq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 1987)$, so folgte $x_1^{11} + x_2^{11} + \ldots + x_{1987}^{11} \leqq 1987$ im Widerspruch zu (1).
Wäre aber mindestens ein $x_i \geqq 2$, so folgte, da alle $x_i \geqq 0$ sind, $x_1^{11} + x_2^{11} + \ldots + x_{1987}^{11} \geqq 2^{11} = 2048$, ebenfalls im Widerspruch zu (1). Damit ist die Annahme widerlegt, d. h. der verlangte Beweis geführt.

b) Es genügt, an einem Beispiel zu zeigen, wie man unendlich viele verschiedene Lösungen von (1) bilden kann, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind. Ein solches Beispiel ist etwa das folgende:
Für jede natürliche Zahl n bilde man die Zahlen

=0 2048 -60

$$x_1 = n,\ x_2 = -n,\ x_3 = 2,\ x_4 = x_5 = \ldots = x_{63} = -1,$$
$$x_{64} = x_{65} = \ldots = x_{1987} = 0.$$

Alle diese x_i sind ganze Zahlen; für jedes n ist $(x_1, x_2, \ldots, x_{1987})$ mit den so gebildeten x_i wegen

$$n^{11} + (-n)^{11} + 2^{11} + 60 \cdot (-1)^{11} = n^{11} - n^{11} + 2048 - 60 = 1988$$

eine Lösung von (1); ferner gilt: Hat man zu einer natürlichen Zahl n die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1987}$ gebildet und zu einer natürlichen Zahl $n' \neq n$ ebenso die Zahlen

$$x_1' = n',\ x_2' = -n',\ x_i' = x_i\ (i = 3, 4, \ldots, 1987),$$

so ist $x_1 \neq x_1'$, also sind die beiden Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_{1987})$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_{1987}')$ voneinander verschieden.

270932) Lösung: 7 Punkte

I. Der genannte Satz gilt nicht allgemein. Um dies nachzuweisen, genügt es, ein Beispiel reeller Zahlen a, b, c, d anzugeben, für die $b \neq 0$, $b+c \neq 0$, $b+d \neq 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, aber $\frac{a}{b} \geq \frac{a+d}{b+d}$ gilt.

Ein solches Beispiel bilden etwa die Zahlen $a = 0$, $b = -2$, $c = 3$, $d = 1$, wie aus $b \neq 0$, $b+c = 1 \neq 0$, $b+d = -1 \neq 0$ und $\frac{a}{b} = 0$, $\frac{a+c}{b+c} = \frac{3}{1} > 0$, $\frac{a+d}{b+d} = \frac{1}{-1} < 0$ ersichtlich ist.

II. Für positive a, b, c, d gilt: Aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

folgt wegen $b > 0$ und $b+c > 0$

$$a(b+c) < (a+c)b,$$
$$ab + ac < ab + bc,$$
$$ac < bc.$$

Wegen $c > 0$ folgt hieraus

$$a < b$$

und dann wegen $d > 0$ weiter

$$ad < bd,$$
$$ab + ad < ab + bd,$$
$$a(b+d) < (a+d)b.$$

Wegen $b > 0$ und $b+d > 0$ folgt hieraus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}.$$

Der genannte Satz gilt also allgemein.

Hinweis: Zur Lösung von Aufgabe I genügt es nicht, nachzuweisen, daß der (oder ein ähnlich gestalteter) Beweis zu II versagt.

270933) Lösung: 6 Punkte

Mit den Bezeichnungen

$$\overline{\sphericalangle ASD} = \sigma, \quad \overline{\sphericalangle ATD} = \tau, \quad \overline{\sphericalangle ABD} = \varphi, \quad \overline{\sphericalangle BAC} = \varepsilon$$

gilt nach dem Peripheriewinkelsatz auch ✓

$$\overline{\sphericalangle BDC} = \varepsilon .$$

✓ Nach dem Außenwinkelsatz für Dreieck ABS und Dreieck BTD folgt

$$\sigma = \varphi + \varepsilon \quad , \quad \tau = \varphi - \varepsilon .$$

Somit ist $\sigma + \tau = 2\varphi$, also 3 P

$$\frac{\sigma}{2} = \varphi - \frac{\tau}{2} \qquad \frac{\tau}{2} = \varphi - \frac{\sigma}{2} \tag{1}$$

$< \varphi$;

daher schneidet die Gerade, auf der g liegt, die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt Q. Nach dem Außenwinkelsatz für Dreieck BQS und nach (1) folgt nun

$$\overline{\sphericalangle BQS} = \varphi - \frac{\sigma}{2} = \frac{\tau}{2}.$$ 2

Aus dieser Übereinstimmung zweier Stufenwinkel folgt die Behauptung g ∥ h.

1

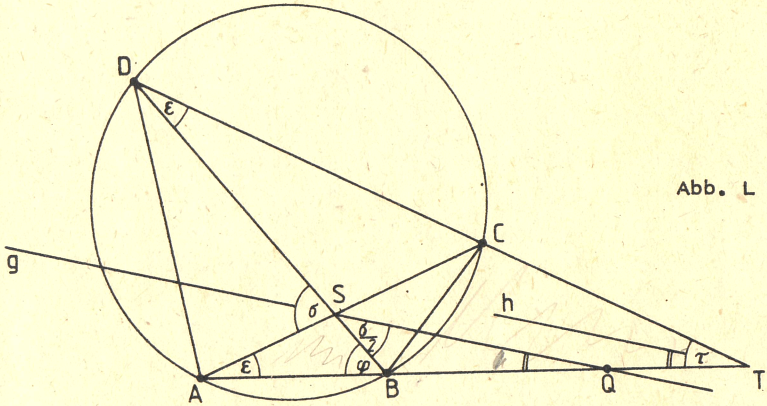


Abb. L 270933

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Q kann auch in T oder auf der Verlängerung von BT über T hinaus liegen, was den Beweis jedoch nicht beeinflußt. Bei anderer Beweisführung kann aber eine Lagediskussion von Schnittpunkten erforderlich werden.

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

<u>270934) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Dirk ermittelte zunächst für jeden Punkt die Anzahl der von ihm ausgehenden Strecken. Man betrachte diejenige Summe s, die aus allen diesen Anzahlen als Summanden gebildet wird.
Wäre darin die Anzahl A aller ungeradzahligen Summanden ungerade, so wäre auch die von ihnen gebildete Teilsumme ungerade, und durch Hinzufügen aller geradzahligen Summanden entstünde insgesamt eine ungerade Summe s. Das ist aber nicht möglich, da die Summe s aufgrund ihrer obengenannten Bildung jede von Jens gezeichnete Strecke genau zweimal erfaßt und folglich eine gerade Zahl ist.

Damit ist bewiesen, daß Christas Behauptung zutrifft.

<u>Andere Lösungsmöglichkeit:</u> Ein Punkt heiße "gerade" bzw. "ungerade" je nachdem, ob von ihm eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht. Hätte Jens überhaupt keine Strecke gezeichnet, so wären alle Punkte "gerade", also wäre A=0. Man zeigt nun, daß sich A beim Hinzufügen jeweils einer Strecke stets um eine geradzahlige Differenz ändern muß:

1. Verbindet die hinzugefügte Strecke zwei "gerade" Punkte, so werden diese "ungerade"; A vergrößert sich um 2.
2. Verbindet die hinzugefügte Strecke zwei "ungerade" Punkte, so werden diese "gerade"; A verkleinert sich um 2.
3. Verbindet die hinzugefügte Strecke einen "geraden" mit einem "ungeraden" Punkt, so ändern beide ihren Charakter; A bleibt unverändert.

Ein <u>ähnlicher Lösungsweg</u> besteht darin, von dem Fall auszugehen, daß jeder der n Punkte mit allen n-1 anderen Punkten verbunden ist (für gerades n ist hierbei A=n; für ungerades n aber A=0) und dann die drei Möglichkeiten des Löschens einer Strecke zu diskutieren.

Weitere Varianten dieser Lösungswege bestehen darin, ausgehend von den durch Jens gezeichneten Strecken durch Wegnehmen oder Hinzufügen von Strecken zur leeren oder zur vollständigen Menge von Verbindungsstrecken überzugehen.

270935) Lösung: 7 Punkte

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$2^{n+2} + 3^{2n+1} = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n.$$

Ferner ist $9^n - 2^n$ durch 7 (= 9 - 2) teilbar, wie man z. B. zeigen kann, indem man durch Ausmultiplizieren die Gleichung

$$(9 - 2) \cdot (9^{n-1} + 9^{n-2} \cdot 2 + \ldots + 9 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}) = 9^n - 2^n$$

erhält. Also läßt 9^n bei Division durch 7 denselben Rest wie 2^n.

Folglich läßt $4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n$ bei Division durch 7 denselben Rest wie ($4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n =$) $7 \cdot 2^n$, d. h. den Rest 0. Somit ist für jede natürliche Zahl n

$$2^{n+2} + 3^{2n+1} \text{ durch 7 teilbar.} \qquad (1)$$

Für $n \geqq 1$ folgt ferner

$$2^{n+2} + 3^{2n+1} \geqq 2^3 + 3^3 > 7. \qquad (2)$$

Mit (1) und (2) ist bewiesen: Es gibt keine natürliche Zahl $n \geqq 1$, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist.

Hinweis: Ein Beweis zu (1) kann auf verschiedenartige Weise formuliert werden, z. B. auch folgendermaßen durch Zitieren eines "Rechnens mit Kongruenzen":
Die wiederholte Anwendung des Satzes, daß aus $a \equiv b \bmod 7$ und $c \equiv d \bmod 7$ stets $ac \equiv bd \bmod 7$ folgt, ergibt

$$3 \cdot 9^n \equiv 3 \cdot 2^n \bmod 7.$$

Nach dem Satz, daß aus $c \equiv d \bmod 7$ stets $a+c \equiv a+d \bmod 7$ folgt, ergibt sich

$$4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n \equiv 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n \bmod 7$$

usw.
Man kann auch nutzen, daß sich $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ bei Vergrößerung von n auf n+1 um die Summe aus seinem eigenen Wert und $7 \cdot 3^{2n+1}$ vergrößert.

270936) Lösung: 7 Punkte

a) Dreht man das Dreieck EFG um EG als Drehachse und wählt dabei den Drehwinkel 90° so, daß das Dreieck in den Außenraum des Würfels übergeht, so gelangt es in die durch E, C, G gehende Ebene e, und zwar geht F in einen Punkt F_1 über, der (in e) auf der anderen Seite von EG liegt als C. Somit wird EG von der Strecke CF_1 in einem Punkt P_0 geschnitten. Genau dieser Punkt hat die behauptete Eigenschaft, wie folgendermaßen bewiesen werden kann:

Für jeden Punkt P auf EG gilt, da er bei der obengenannten Drehung fest bleibt, $\overline{PF} = \overline{PF_1}$, also

$$\overline{CP} + \overline{PF} = \overline{CP} + \overline{PF_1}.$$

Insbesondere gilt auch

$$\overline{CP_0} + \overline{P_0F} = \overline{CP_0} + \overline{P_0F_1}.$$

Nach Definition von P_0 ist ferner

$$\overline{CP_0} + \overline{P_0F_1} = \overline{CF_1};$$

für jeden anderen Punkt P auf EG ist dagegen CPF_1 ein (nicht zur Strecke entartetes) Dreieck, so daß nach der Dreiecksungleichung

$$\overline{CF_1} < \overline{CP} + \overline{PF_1}$$

folgt. Somit[1] hat P_0 die behauptete Eigenschaft $\overline{CP_0} + \overline{P_0F} < \overline{CP} + \overline{PF}$ für jedes $P \neq P_0$ auf EG, und daher ist P_0 auch der einzige Punkt auf EG mit dieser Eigenschaft (denn jeder andere Punkt auf EG erfüllt mindestens beim Vergleich mit P_0 nicht diese Bedingung).

b) Es seien M, N die Mittelpunkte der Strecken BE bzw. EG (z. B. zu erhalten als Diagonalenschnittpunkte der Quadrate ABFE bzw. EFGH). Da EF_1G ebenso wie EFG ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit EG als Hypotenuse ist, steht die (in der Ebene e verlaufende) Strecke NF_1 auf EG senkrecht und ist folglich parallel zu CG und damit auch zu BF. Ferner ist $\triangle EF_1G \cong \triangle EFB$, also gilt für die einander entsprechenden Höhen in diesen Dreiecken $\overline{NF_1} = \overline{MF}$.

Da nun nach Voraussetzung die Strecken BF und MF in wahrer Richtung und Länge als B'F' bzw. M'F' abgebildet wurden und da bei Parallelprojektion parallele Strecken in parallele Strecken übergehen, ergibt sich die Möglichkeit, den Bildpunkt P_0' von P_0 nach folgender Konstruktionsbeschreibung zu konstruieren (Durchführung der Konstruktion Abb. L 270936):

(1) Man konstruiert den Schnittpunkt M' der Strecken A'F' und B'E'.

(2) Man konstruiert den Schnittpunkt N' der Strecken E'G' und F'H'.

(3) Man konstruiert die Parallele p' durch N' zu B'F'.

(4) Man konstruiert den Kreis um N' mit dem Radius $\overline{M'F'}$. Derjenige seiner Schnittpunkte mit p', der auf der anderen Seite von E'G' liegt als C', wird mit F_1' bezeichnet.

(5) Man konstruiert den Schnittpunkt P_0' der Strecken E'G' und $C'F_1'$.

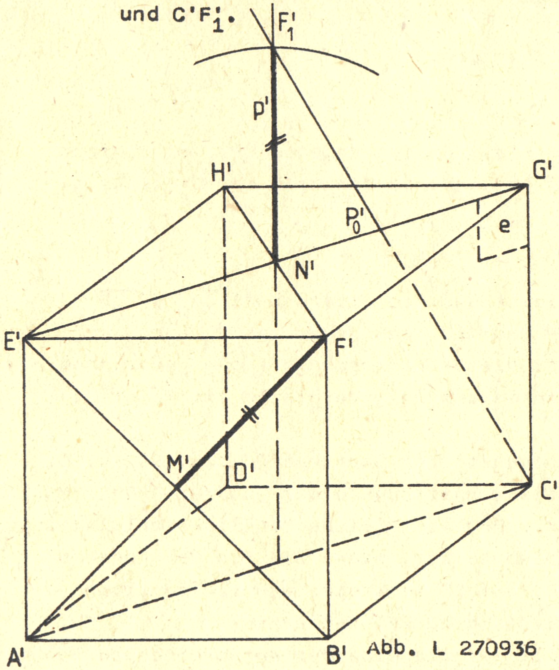


Abb. L 270936

1 Anstelle der Dreiecksungleichung kann auch als bekannter Sachverhalt zitiert werden, daß unter allen Verbindungen (Streckenzügen CPF_1) zweier Punkte C, F_1 die Strecke $(CF_1 = CP_0F_1)$ die kürzeste ist.